

Федеральное агентство по образованию
Московский авиационный институт
(государственный технический университет)

УДК 519.615+519.624

На правах рукописи

КРАСНИКОВ СЕРГЕЙ ДМИТРИЕВИЧ

ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА
В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование, численные
методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель –
доктор физико-математических наук,
профессор
Кузнецов Евгений Борисович

Москва – 2008

Оглавление

Введение	3
1 Параметризация численного решения нелинейных краевых задач	13
1.1. Параметризация задачи	13
1.2. Численные исследования	23
2 Параметризация решения в точках бифуркации	53
2.1. Поведение кривой в точке простой бифуркации	53
2.3. Реализация алгоритма продолжения в точке простой бифуркации	57
2.4. Продолжение решения в точке простого возврата	59
2.5. Дискретное продолжение решения в особой точке вдоль гладкой кривой	63
2.6. Численные эксперименты	68
3 Численное моделирование прикладных задач	80
3.1. Сверхпроводящая пластина в магнитном поле	80
3.2. Трехстержневая ферма	95
Заключение	101
Библиографический список	102

Введение

В первой главе рассматривается краевая задача для нелинейной системы ОДУ [16, 19, 20]

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(t) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n, \quad (0.1)$$

с нелинейными граничными условиями

$$R(y(a), y(b)) = 0. \quad (0.2)$$

Здесь $f : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, $R : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$.

В дальнейшем предполагается, что нелинейные по переменной y функции f и R удовлетворяют на $[a, b]$ таким условиям, при которых решение задачи (0.1) – (0.2) существует.

Для решения краевых задач вида (0.1) – (0.2) разработаны многочисленные методы. В обширной литературе по данной тематике используются всевозможные подходы и различные комбинации методов, например, метод решения краевой задачи может использовать совместно методы решения начальной задачи и методы решения операторного уравнения. Решение краевой задачи может пониматься как решение операторного уравнения в соответствующем пространстве; с этой позиции интересны методы приближенного решения операторных уравнений.

В [22] излагаются способы приближенного решения операторных уравнений. Изучаются различные итерационные процессы решения линейных и нелинейных уравнений. Условия сходимости итерационных процессов уточняются для различных типов операторов. При выборе начального приближения нелинейного операторного уравнения в него вводится параметр $\lambda \in [0, 1]$ такой, что при $\lambda = 0$ решение уравнения известно или может быть легко найдено, а при $\lambda = 1$ получается решение исходного уравнения. Решение строится методом продолжения по параметру λ . Рассматриваются два подхода: непрерывное продолжение и дискретное. Отмечается, что продолжение по параметру $\lambda \in [0, 1]$ основывается на теореме о неявных операторных уравнениях в банаховых пространствах, которая дает локальные условия продолжаемости (требует гладкости правой

части). Нелокальная продолжаемость на весь отрезок является проблемой, так как никакая гладкость здесь не помогает. Для построения приближений обосновывается использование метода Ньютона-Канторовича. Исследуется задача о точках бифуркации уравнения с параметром.

В [44] рассматриваются три метода решения нелинейных краевых задач: метод стрельбы, метод функции Грина, метод конечных разностей. При определенных условиях доказывается сходимость этих методов.

В [31] изложены численно-аналитические методы исследования существования и приближенного построения периодических решений автономных систем ОДУ и решений нелинейных систем дифференциальных уравнений, рассматриваемых при неразделяющихся двухточечных краевых условиях. В этом случае предлагается вводить параметр в краевые условия таким образом, чтобы на первом шаге метода продолжения по параметру решение было бы известно, а на последнем шаге по параметру мы получали бы решение первоначальной краевой задачи. После введения параметра предлагаются различные способы решения получившегося уравнения, например, использование модифицированного метода Ньютона-Канторовича. Приведена обширная библиография по данной тематике.

Монография [49] посвящена различным методам решения краевой задачи. Основной упор делается на методе стрельбы и различным его модификациям. Для исследования линейных краевых задач также предлагается использовать метод суперпозиции и метод сопряженного оператора. В случае нелинейной краевой задачи ее предварительно линеаризуют. Для улучшения метода суперпозиции предлагается производить реортогонализацию С.К. Годунова [5]. Для этого предлагается использовать алгоритм, предложенный С.Д. Контом [39]. В монографии обсуждаются вопросы связанные с квазилинеаризацией, например, сходимость и указывается связь с методом Ньютона-Рафсона-Канторовича. Для жестких задач авторами предлагается использовать метод продолжения по параметру. Демонстрируются большие возможности метода продолжения и приводятся теоремы о сходимости в функциональных пространствах. В качестве конкретных реализаций, предлагается использовать, в первом случае, как параметр продолжения длину отрезка интегрирования. Вторая реализация подхода связана с введением параметра непосредственно в дифференциальное уравнение.

В [3] описывается единый подход к решению различных нелинейных задач, названный квазилинеаризацией. Так квазилинеаризация применяется при исследовании уравнения Риккати, для решения двухточечных краевых задач, рассматривается применение квазилинеаризации к урав-

нениям в частных производных, для решения вариационных задач и задач возникающих в динамическом программировании. Авторами подчеркивается связь квазилинеаризации с методом Ньютона-Рафсона-Канторовича в конкретных функциональных пространствах, что обеспечивает, при определенных условиях, квадратичную сходимость. Вдобавок к этому, авторы исследуют условия при которых последовательности сходятся монотонно. Это приводит к дифференциальным неравенствам. Для метода квазилинеаризации получены условия сходимости.

В [2] рассматриваются различные способы решения краевых задач. Обсуждение начинается с линейных краевых задач, далее результаты переносятся на нелинейный случай. Описывается метод стрельбы и метод конечных разностей. В линейном случае предлагается использовать, как достаточно перспективный, метод ортогональной прогонки [5]. Излагаются достоинства этого метода. После линеаризации нелинейного уравнения предлагается использовать метод ортогональной прогонки для решения нелинейной краевой задачи.

Монография [32] посвящена различным численным методам решения двухточечных и многоточечных краевых задач. Книга адресована разработчикам программ реализующих тот или иной численный метод, поэтому теоретические аспекты методов почти не рассматриваются, однако читатель всегда отсылается к соответствующим результатам. Каждый численный метод иллюстрируется несколькими примерами.

Во второй главе рассматриваются различные способы параметризации необходимые для численного преодоления точек бифуркации и один алгоритм, позволяющий находить все ветви в точке простой бифуркации [21].

В общем случае кривая может быть задана соотношением

$$F(x) = 0,$$

где $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ достаточно гладкая функция. В существенно особой точке x_0 ранг матрицы Якоби функции F

$$F'(x_0) = J_0 = \left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_{n+1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_{n+1}} \end{array} \right)_{x=x_0}$$

удовлетворяет неравенству

$$\text{rank } F'(x_0) < n.$$

Локализация точки бифуркации и анализ поведения решения в окрестности такой точки является сложной задачей. Основным инструментом решения этой проблемы являются методы продолжения решения по параметру, носящие локальный характер [33]. Это проявляется в том, что вычисление матрицы Якоби и обращение ее для поиска ближайших точек решения - существенная черта этих методов. Различные формы метода продолжения решения, реализующие равноправие всех переменных, имеют единый алгоритм продолжения решения в регулярных и предельных точках множества решений нелинейных систем уравнений. Анализ поведения решения в случае точки бифуркации требует привлечения дополнительных методов. В качестве основного метода исследования будет принят метод разложения в ряд Тейлора в окрестности особой точки. Он позволяет разложить по специальным переменным уравнение разветвления, анализируя которое можно найти все ветви решения. Сложность анализа зависит от степени вырождения матрицы Якоби F' . Здесь рассматривается случай, когда $\text{rank } F'(x_0) = n - 1$.

Проблеме продолжения решения в окрестности точки бифуркации посвящено множество работ. Рассмотрим те работы, которые имеют непосредственное отношение к теме данного исследования.

Монография [4] посвящена изложению теории ветвления нелинейных уравнений, в основе которой лежит редукция первоначальной нелинейной задачи к эквивалентной конечномерной задаче - уравнению разветвления. Получены различные обобщения классических результатов работ А.М. Ляпунова и Э. Шмидта. В рамках данной теории сначала исследуются ветвление периодических решений дифференциальных уравнений и построение решений нелинейных интегральных уравнений. Затем излагается главный результат монографии – общая теория ветвления решений нелинейных уравнений в банаховых пространствах. Рассматриваются некоторые прикладные задачи, возникающие в механике.

Монография [45] посвящена изложению вычислительных аспектов теории бифуркаций и различных методов решения нелинейных уравнений. На примере задачи зависящей от параметра (логистического уравнения), показывается как возникает ветвление на практике. Изучаются локальные методы продолжения. Описываются различные предикторно-корректорные схемы. Особое внимание посвящено корректорам ньютоновского и квазиньютоновского типа. Рассматривается глобальная теория. Излагаются основные результаты теории степеней отображений Брауэра. Гомотопическая инвариантность степени отображения позволяет получить ряд замечательных результатов. К таким результатам относится тест на появление бифуркации и глобальный метод Ньютона. В

связи с последним читатель отсылается к работам Смейла и Бранина. Описывается практическая реализация метода движения вдоль кривой множества решений и решение сопутствующих проблем. Вводятся определения простой предельной точки (simple limit point, simple fold). В качестве параметра продолжения предлагается использовать аппроксимации длины дуги (pseudoarclength continuation). Применение метода Ньютона к расширенной системе, приводит к необходимости обращения матрицы специальной структуры. Описание реализации такого обращения определяет алгоритм окаймления (bordering algorithm). В силу структуры расширенной системы алгоритм будет без изменения работать в некоторых сингулярных точках. Исследуются простые сингулярные точки (simple singular point), находятся различные ветви решения в этих точках. Формулируется и доказывается теорема, утверждающая, что при определенных условиях (ноль алгебраически простое собственное значение) якобиан системы продолжения меняет знак в простой сингулярной точке. Также излагается результат позволяющий свободно проходить простые сингулярные точки, оставаясь на той ветви, которая соответствует гладкому продолжению. Рассматриваются вопросы устойчивости. Далее предлагается пять методов нахождения дополнительной ветви, которая появляется в точке бифуркации. Первый метод заключается в нахождении компонент разложения касательных векторов по специальному базису, для чего необходимо составлять квадратичную форму с приближенными коэффициентами. Вторым методом является поиск решения на некотором параллельном подмножестве, удаленном от точки бифуркации в направлении перпендикулярном к касательной, но лежащем на специальной плоскости. Третий метод заключается в непосредственном применении конструктивной теории существования Ляпунова-Шмидта. Этот метод позволяет построить уравнения, решая которые получаем вторую ветвь. Четвертый метод заключается в использовании способа аналогичного тому, который применяли Крандалл и Рабинович для доказательства известной теоремы о ветвлении в точке простой бифуркации. В пятом методе используется специальное возмущение правой части, позволяющее избавиться от точки бифуркации и, таким образом, расщепить ветви. Кратко рассматриваются многопараметрические задачи и бифуркации Хопфа.

Работа [37], посвящена различным аспектам применения метода продолжения по длине дуги кривой множества решений. Изложение кратко затрагивает некоторые вопросы нахождения и обработки точек бифуркации. Им целиком посвящен один раздел: "нелинейные задачи на собственные значения, бифуркации". В этом разделе дается определение точки бифуркации и простой точки бифуркации. Используя редукцию

Ляпунова-Шмидта, для простой точки бифуркации доказывается вариант теоремы Крандалла-Рабиновича. Данная теорема дает условия при которых две гладкие кривые пересекаются в точке под ненулевым углом. Далее приводится важный результат – ориентация кривой (определитель производной Фреше оператора системы продолжения) меняется при переходе через простую точку бифуркации (результат, по-видимому, впервые был получен М. А. Красносельским). Этот результат особенно важен для численного прохождения кривой и определения точки бифуркации. Отмечается, что в силу результатов Келлера о существовании конуса сходимости с центром в точке бифуркации, при достаточно малом шаге движения вдоль кривой, точка полученная предиктором попадает в этот конус сходимости ньютоновского корректора. Это позволяет проходить точку простой бифуркации с помощью стандартных предикторно-корректорных схем. Кроме того, появляется возможность детектирования специальных типов бифуркаций – смена знака определителя расширенного якобиана системы. Отмечается, что в случае бифуркации Хопфа этот метод неприменим. Для более трудной задачи численного перехода на другую ветвь предлагается возмущать с помощью малого параметра систему уравнений продолжения. Такой подход становится возможным благодаря известной теореме Сарда, утверждающей, что иррегулярности имеют меру нуль. Таким образом специальным "шевелением" параметров задачи можно избавиться от точек бифуркации, и получить вторую ветвь. Обсуждаются недостатки данного подхода. Предлагаются еще два возможных подхода. Первый заключается в расширении первоначальной системы для непосредственной обработки точки бифуркации. Далее к расширенной системе применяется, например, метод Ньютона. Данный подход получил свое развитие в работах Зейделя и Вебера. Второй подход заключается в построении бифуркационного уравнения, из которого затем определяются касательные к различным ветвям. Этот подход разрабатывался в работах Келлера и Рейнболдта. Более детально обсуждается лишь первый подход. Описывается алгоритм Алговера и Шветлика являющийся одной из реализаций такого подхода. Далее кратко рассматривается возможность появления кратных бифуркации при условии, что система демонстрирует определенную симметрию. Краткость изложения компенсируется ссылкой на соответствующие результаты.

В статье [41] дается введение в локальную теорию бифуркаций однопараметрических систем около положения равновесия как для обыкновенных дифференциальных уравнений, так и для отображений Пуанкаре. Обсуждаются на элементарном уровне основные аналитические методы локальной теории: 1)редукция к центральному многообразию, 2)теория

нормальных форм Пуанкаре-Биркгофа. Рассматриваются вопросы связанные с симметрией нормальных форм. В заключении рассматриваются примеры: бифуркации возникающие в процессах, описываемых уравнением Гинзбурга-Ландау; бифуркации Хопфа, возникающие в модели трех волн.

Последняя глава монографии [36] посвящена исследованию продолжения решения в особых точках. Предполагается, что решения системы уравнений (2.1) описываются гладкими кривыми $x = x(\lambda)$, где λ длина дуги данной кривой. Это позволяет использовать разложение в ряд Тейлора для анализа поведения в особой точке. Предлагается первоначальное пространство \mathbb{R}^{n+1} раскладывать в прямую сумму двух подпространств P^r и A^d . Пространство A^d натянуто на векторы, ортогональные строкам расширенной матрицы Якоби системы J_0 в особой точке x_0 , ранг которой равен r , $d = n + 1 - r$ — показатель вырождения задачи. Это позволяет получить два результата: касательный вектор любой ветви кривой принадлежит пространству A^d ; анализ первоначальной задачи размерности $n + 1$ эквивалентен анализу другой задачи размерности d . Эта последняя задача заключается в решении уравнения разветвления. В случае однократного ($\text{rank } J_0 = n - 1$) и двукратного ($\text{rank } J_0 = n - 2$) вырождения проводится построение уравнения разветвления в первом приближении.

В монографии [6] проблема определения напряженно деформированного состояния сводится к проблеме решения системы нелинейных уравнений $f(x, p) = 0$, где x и p являются дискретными аналогами перемещений и нагрузок. Являясь уравнениями равновесия деформируемого твердого тела, они получаются как частные производные полной потенциальной энергии деформации тела. Отсюда следует, что матрица Якоби левых частей будет симметрична. Для исследования нагруженного состояния предлагается использовать специальный вариант метода продолжения решения по параметру. Такой подход позволяет сохранить симметрию матрицы Якоби за счет некоторого ухудшения обусловленности системы продолжения. Симметрия матрицы Якоби гарантирует наличие базиса составленного из собственных векторов. В существенно особых точках это дает возможность переходить с основной ветви на бифуркационную. Рассматриваются вопросы связанные с нахождением существенно особых точек и с уточнением решения в особых точках.

В монографии [43] рассматривается абстрактная теория бифуркаций нелинейных фредгольмовых операторов в банаховых (иногда гильбертовых) пространствах.

Изложение локальной теории начинается с абстрактной теоремы о неявной функции. Нарушение предположений этой теоремы приводит к

возможности появления бифуркации. Далее исследование бесконечномерной задачи сводится к исследованию конечномерной задачи - бифуркационного уравнения. Размерность новой задачи равна размерности вырождения первоначальной задачи. Этот переход осуществляется с использованием известного метода редукции Ляпунова-Шмидта. Переход к новой задаче позволяет получить ряд результатов. В случае специального одномерного вырождения удается применить теорему о неявной функции к уравнению разветвления. Точки, в которых выполняются все условия этой теоремы, называются "точками переключения"(turning points), "складками"(folds), в некоторых специальных случаях они также известны как "бифуркации седловых точек"(saddle node bifurcation), в отечественной литературе – это предельные точки. Далее исследуется вопрос о бифуркациях с одномерным ядром производной Фреше нелинейного фредгольмового оператора. В данном случае под точкой бифуркации понимается точка (x, λ) , в которой пересекаются два решения уравнения $F(x, \lambda) = 0$. Второй результат, использующий редукцию Ляпунова-Шмидта - теорема Крандалла-Рабиновича, которая дает достаточные условия для существования таких точек. В зависимости от взаимного расположения кривых в окрестности особой точки эти бифуркации называются: переходная (transcritical) (производная параметра задачи λ по длине дуги кривой множества решений не равна нулю), докритическая (subcritical), закритическая (supercritical). В последних двух случаях такие бифуркации известны как "вилки"(pitchfork bifurcation). Полученные ранее результаты позволяют исследовать вопрос об устойчивости эволюционных уравнений общего вида

$$\frac{dx}{dt} = F(x, \lambda) \quad (0.3)$$

на решениях в окрестности точек бифуркации. Для эволюционного уравнения точка (x_0, λ_0) , в которой $F(x, \lambda) = 0$, называется точкой равновесия. Принцип исследования устойчивости по первому приближению не применим к точкам равновесия, в которых происходит вырождение производной правой части $F(x, \lambda)$. Ясно, что это будут точки бифуркации для $F(x, \lambda) = 0$. Однако, этот принцип можно применить к кривым множества решений, проходящим через (x_0, λ_0) . Такой подход можно рассматривать как исследование возмущения нулевого собственного значения. При условии, что ноль простое собственное значение, в четырех случаях (turning point, transcritical, subcritical, supercritical) исследуется устойчивость возмущения. Результат формулируется в виде "принципа обмена устойчивостью"(principle of exchange of stability). Исследуется вопрос о потере устойчивости эволюционной (0.3) системы при переходе

комплексно-сопряженной пары собственных значений через мнимую ось при некотором значении параметра задачи λ_0 . Это приводит к формулировке и доказательству теоремы Хопфа для фредгольмовых операторов, действующих в банаховых пространствах. По теореме о неявной функции стационарное решение в этом случае не появляется, однако, по теореме Хопфа при этом значении параметра появляется периодическое решение (бифуркация Хопфа). Устанавливается, что бифуркация Хопфа является двухпараметрической, другим скрытым параметром является период. Рассматривается возможность появления периодических решений в случае системы (0.3) без явного параметра λ . Это требует дополнительных ограничений. К таким ограничениям относится гамильтоновость системы. Это приводит к варианту теоремы Ляпунова о периодических решениях. Далее, для ряда специальных случаев, уточняется теорема Хопфа и теорема Ляпунова. Изучается также "принцип обмена устойчивостью" для бифуркаций Хопфа. Это требует привлечения теории множителей и экспонент Флоке. Далее исследуется вопрос глобального продолжения локальных периодических решений, полученных с использованием теоремы Хопфа, и их устойчивость, делается замечание о их связи с неподвижными точками отображения Пуанкаре эволюционной системы. Изучаются бифуркации удвоения периода и изучается их устойчивость. Подчеркивается, что обычный способ изучения таких бифуркаций - изучение итераций отображений Пуанкаре. В предыдущих разделах монографии бифуркации с одномерным ядром изучались с помощью метода Ляпунова-Шмидта, который приводил к изучению одномерного бифуркационного уравнения. Далее это уравнение решалось, с использованием теоремы о неявной функции. Применимость теоремы гарантировалась специальными условиями, налагаемыми на бифуркационное уравнение. В случае отказа от этих условий, теорема о неявной функции должна заменяться более мощным подходом - методом диаграммы Ньютона. Поэтому диаграмма Ньютона изучается в связи с более сложными случаями ветвления операторов. Используя этот метод, сначала изучаются операторы с простым собственным значением, далее кратко рассматривается ситуация многомерного вырождения. Проводится анализ устойчивости. Аналогичный подход используется для изучения вырожденных бифуркаций Хопфа. Основная идея глобальной теории бифуркаций заключается в том, что о наличии бифуркации можно судить по некоторым косвенным признакам на опорной траектории. Так, например, для задачи продолжения по параметру, этим признаком является смена знака расширенного якобиана системы. В монографии эта идея обобщается на нелинейные фредгольмовы операторы. Основным инструментом исследования явля-

ется теория степеней Брауэра, перенесенная на специальные операторы в банаховых пространствах, и известная как теория степеней Лере - Шаудера. Отмечается, что первое применение методов глобальной теории дано в работах М. А. Красносельского. Ряд результатов уточняется для потенциальных операторов. Далее изучаются различные приложения полученных ранее результатов к теории уравнений в частных производных.

Глава 3 посвящена численному решению прикладных задач, с использованием предложенных ранее методов. Рассматривается задача о сверхпроводящей пластине, помещенной в магнитное поле. Теория таких задач была создана в работах В.Л.Гинзбурга и Л.Д.Ландау [8]. В статье [11] проведено численное и аналитическое исследование задачи. В третьей главе диссертации воспроизведены результаты статьи [11] и, кроме того, получены новые результаты. Далее в той же главе рассматривается задача о бифуркации трехстержневой фермы. С помощью нового подхода удалось решить задачу без использования начальных возмущений.

Глава 1

Параметризация численного решения нелинейных краевых задач

1.1. Параметризация задачи

Изучим численное решение задачи (0.1) – (0.2) при помощи метода пристрелки. При этом проблема заключается в сведении краевой задачи (0.1) – (0.2) к начальной задаче для системы (0.1) с условиями

$$y_1(a) = x_1, y_2(a) = x_2, \dots, y_n(a) = x_n. \quad (1.1)$$

Компоненты вектора $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ следует подобрать таким образом, чтобы решение задачи (0.1), (1.1) удовлетворяло на правом конце $[a, b]$ условию (0.2).

Понятно, что в этом случае решение начальной задачи будет зависеть от вектора x , т.е.

$$y = y(t, x). \quad (1.2)$$

Причем функция (1.2) должна удовлетворять условию

$$F(x) \equiv R(y(a, x), y(b, x)) = 0. \quad (1.3)$$

Вектор x можно определить, решая, например, итерационным методом Ньютона систему уравнений (1.3), тогда имеем

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = x^{(k)} - \left[\frac{\partial F}{\partial x}(x^{(k)}) \right]^{-1} F(x^{(k)}), \\ x^{(0)} = x_0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Здесь $x^{(k)}$ – значение вектора x на k – ой итерации, $\frac{\partial F}{\partial x} = F'(x)$ – матрица Якоби системы (1.3). Рекомендации по вычислению элементов этой матрицы приводятся в [2]. Условия сходимости итерационного процесса (1.4) устанавливаются следующей теоремой [33].

Теорема 1.1 Пусть в шаре $B(x_0, r)$ оператор $F(x)$ дифференцируем и непрерывно обратим, причем

$$1) \exists l > 0 : \|F'(x_1) - F'(x_2)\| \leq l\|x_1 - x_2\|, \quad \forall x_1, x_2 \in B(x_0, r);$$

$$2) \exists [F'(x)]^{-1}, \|[F'(x)]^{-1}\| \leq m, \quad \forall x \in B(x_0, r).$$

Тогда, если $q = 0.5m^2l\eta < 1$, где $\eta \geq \|F(x_0)\|$ и

$$r' = m\eta \sum_{k=0}^{+\infty} q^{2^k-1} < r,$$

то уравнение $F(x) = 0$ имеет решение $x^* \in \overline{B(x_0, r')}$, к которому сходится итерационный процесс Ньютона, начатый с x_0 . Скорость сходимости $x^{(n)}$ к x^* дается неравенством

$$\|x^{(n)} - x^*\| \leq m\eta \frac{q^{2^n-1}}{1 - q^{2^n}}.$$

Из теоремы 1 следует, что сходимость итерационного процесса (1.4) определяется удачным выбором начального приближения $x^{(0)}$, что часто бывает сделать очень сложно. Общие рецепты построения приемлемых начальных приближений не могут быть даны. Однако могут быть описаны приемы, применяемые при решении широкого класса уравнений, см., например, [14].

Для преодоления этих трудностей в [31] предлагается ввести в систему (1.3) параметр $\mu \in [0, 1]$, таким образом, чтобы при $\mu = 0$ решение системы было известно, а при $\mu = 1$ получалось бы решение исходной системы. Это можно сделать, например, следующим образом

$$\Phi_j(x, \mu) = F_j(x) - (1 - \mu)F_j(x_0) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad \mu \in [0, 1], \quad (1.5)$$

где x_0 – некоторое решение уравнения (1.5) при $\mu = 0$.

Систему уравнений (1.5) можно решать методом продолжения решения по параметру в форме М. Лаэя (M. LaHaye) [48] или в форме Д.Ф. Давиденко [9]. Первый вариант назовем дискретным, а второй – непрерывным продолжением. В [38],[1] для решения краевой задачи в проблеме оптимального управления используется непрерывный вариант метода. В

[24] показано, что дискретный вариант является более эффективным, поэтому рассмотрим дискретный случай. Произведем разбиение отрезка, на котором изменяется μ

$$0 = \mu_0 < \mu_1 < \dots < \mu_M = 1 \quad (1.6)$$

на M частей. Для каждого μ_k вычисляется x_k с помощью итерационного процесса:

$$\begin{cases} x_{(k)}^{(i+1)} = x_{(k)}^{(i)} - \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x_{(k)}^{(i)}, \mu_k) \right]^{-1} \Phi(x_{(k)}^{(i)}, \mu_k), & i = 1, \dots, r_k - 1 \\ x_{(k+1)}^{(0)} = x_{(k)}^{(r_k)}. \end{cases} \quad (1.7)$$

Для невязки на последнем шаге по i введем обозначение

$$\Phi(x_k^{(r_k)}, \mu_k) = \varepsilon_k^{(r_k)}.$$

Справедлива следующая

Теорема 1.2 Пусть

1) для $k = 1, \dots, M - 1$ выполняется условие

$$\|\varepsilon_k^{(r_k)}\| < \varepsilon; \quad (1.8)$$

2) в шаре $B(x_0, R)$ единственным образом разрешимы задачи Коши (0.1), (1.1) для $\forall x \in B(x_0, R)$;

3) выполняется неравенство

$$\|F'(x_1) - F'(x_2)\| \leq l \|x_1 - x_2\|, \quad \forall x_1, x_2 \in B(x_0, R); \quad (1.9)$$

4) $\exists [F'(x)]^{-1}$, $\|[F'(x)]^{-1}\| \leq m$, $\forall x \in B(x_0, R)$;

пусть $q = 0.5m^2l\eta < \beta < 1$, где $\eta \geq \|\varepsilon_k^{(r_k)}\|$ для $k = 1, \dots, M - 1$, а ε определена так, чтобы имело место неравенство

$$0.5m^2l\varepsilon < \beta < 1 \quad (1.10)$$

и

$$R' = Mm\eta \sum_{k=0}^{+\infty} q^{2^k - 1} < R,$$

тогда в замкнутом шаре $\overline{B(x_0, R')}$, существует точка x определяющая начальное значение, при $t = a$, решения краевой задачи и при выборе шага сетки из соотношения

$$\Delta\mu = \frac{2\beta - m^2\varepsilon l}{m^2 l \|F(x_0)\|}$$

последовательные приближения $x_k^{(i)}$, вычисленные по итерационной схеме (1.7), при $i \rightarrow \infty$ сходятся к x_k так, что

$$\|x_k^{(i)} - x_k\| \leq m\eta \frac{q^{2^i - 1}}{1 - q^{2^i}}$$

Доказательство. Покажем, что выполняются все условия теоремы 1 о сходимости метода Ньютона-Канторовича применительно к уравнению (1.5) для любого μ_k , $k = 1, 2, \dots, M$.

Если это так, тогда можно заключить, что для всех значений параметра μ_k из сетки (1.6), система уравнений (1.5) в замкнутом шаре $\overline{B(x_k^{(0)}, r')}$, где $r' = m\eta \sum_{j=0}^{+\infty} q^{2^j - 1}$ имеет решение x_k к которому сходятся приближения $x_k^{(i)}$ вычисленные по итерационной формуле (1.7).

Введем в рассмотрение оператор

$$L(x) = F(x) - (1 - \mu)F(x_0).$$

В силу условия (1.9), производная Фреше

$$L'(x) = F'(x)$$

в шаре $B(x_0, R)$ удовлетворяет условию Липшица с константой l .

Теперь предположим, что по схеме (1.7) при $k = 2, 3, \dots$ найдено приближенное решение $x_{k-1}^{(r_{k-1})}$. Тогда на k -м шаге начальное приближение $x_k^{(0)} = x_{k-1}^{(r_{k-1})}$ и невязка равна

$$\begin{aligned} \varepsilon_k^{(0)} &= F(x_k^{(0)}) - (1 - \mu_k)F(x_0) = \\ &= F(x_{k-1}^{(r_{k-1})}) - (1 - \mu_{k-1})F(x_0) + \Delta\mu F(x_0) = \\ &= \varepsilon_{k-1}^{(r_{k-1})} + \Delta\mu F(x_0). \end{aligned}$$

Зафиксируем $\beta < 1$ и выбираем величину шага $\Delta\mu$ из условия

$$0.5m^2 l \eta < \beta. \quad (1.11)$$

Из неравенства (1.11) находим, что

$$0.5m^2l\|\varepsilon_{k-1}^{(r_{k-1})} + \Delta\mu F(x_0)\| < \beta.$$

Используя условие (1.8) и (1.10), получаем

$$\Delta\mu = \frac{2\beta - m^2l\varepsilon}{m^2l\|F(x_0)\|}.$$

Следовательно, при выполнении всех условий данной теоремы выполняются условия теоремы о сходимости метода Ньютона-Канторовича для $k = 1, 2, \dots, M$. На ее основании заключаем, что при каждом $k = 1, \dots, M$ система уравнений (1.5) в шаре $B(x_k^{(0)}, r')$, где $r' = m\eta \sum_{j=0}^{+\infty} q^{2^j-1}$ имеет решение и процесс (1.7) является сходящимся.

Поэтому при $\mu_M = 1$ система уравнений (1.5) эквивалентна системе уравнений $F(x) = 0$ и действительно задает в замкнутом шаре $\overline{B(x_0, R')}$ начальное значение решения краевой задачи. При этом $R' = Mm\eta \sum_{j=0}^{+\infty} q^{2^j-1} < R$ Теорема доказана.

Замечание. Понятно, что условия 2) – 4) теоремы 2 должны выполняться лишь в каком-то подмножестве множества $\overline{B(x_0, R')}$ (это подмножество может быть получено, если взять точки, лежащие в полосе, построенной на расстоянии $\varepsilon + r'$ от кривой множества решений системы (1.5), от точки x_0 до точки x^*).

Кривая множества решений системы (1.5) может содержать предельные точки, в которых матрица Якоби системы вырождается и итерационный процесс метода Ньютона перестает сходиться. Для того, чтобы избежать этих неприятностей следует продолжать решение не по параметру μ , а по наилучшему параметру [36], которым является параметр ν – длина кривой множества решений системы уравнений (1.5). В монографии [36] приводится доказательство этого утверждения и описание вычислительного алгоритма использования при решении системы (1.5) непрерывного варианта метода продолжения решения по наилучшему параметру. Дискретный вариант метода продолжения решения по наилучшему параметру для решения системы уравнений (1.5) предложен в [23], [24].

Поэтому для решения системы уравнений (1.5) применяется дискретный вариант метода продолжения решения по наилучшему параметру. Для этого кривая множества решений этой системы разбивается на l участков, начиная от начальной точки $\nu = \nu_0 = 0$ до конечной $\nu = \nu_l = L$: $\nu_0 = 0 < \nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_l = L$ и решение строится продвигаясь по последовательности этих значений наилучшего параметра ν . При этом неизвестные, входящие в систему (1.5), являются функциями параметра

ν и в k -ой точке разбиения принимают значения $x_{(k)} = x(\nu_k)$, $\mu_k = \mu(\nu_k)$. Тогда значения этих неизвестных в $k+1$ -ой точке могут быть найдены из решения следующей системы уравнений [24],[23]

$$\begin{cases} \Phi_j(x, \mu) = F_j(x) - (1 - \mu)F_j(x_0) = 0, & j = 1, 2, \dots, n, \\ \Phi_{n+1}(x, \mu) = \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j(k)})^2 + (\mu - \mu_k)^2 - \Delta\nu_k^2 = 0. \end{cases} \quad (1.12)$$

Здесь $\Delta\nu_k = \nu_{k+1} - \nu_k$, $x_{j(k)} = x_j(\nu_k)$, $k = 1, 2, \dots, l$, $j = 1, 2, \dots, n$.

На каждом шаге продвижения по наилучшему параметру ν систему уравнений (1.12) следует решать каким-либо итерационным методом, например, методом Ньютона. При этом неприятности в предельных точках кривой множества решений этой системы уравнений уже не возникнут. Некоторые рекомендации по выбору начального приближения итерационного процесса приводятся в [24].

Обозначим через $\Psi_{k+1}(z)$ систему (1.12), в которой приращение наилучшего параметра $\Delta\nu$ постоянно

$$\Psi_{k+1}(z) = \begin{cases} F(x) - (1 - \mu)F(x_0) = 0, \\ \|x - x_k^{(r_k)}\|^2 + (\mu - \mu_k^{(r_k)})^2 - \Delta\nu^2 = 0, \end{cases} \quad (1.13)$$

где $z = (x, \mu) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\nu_{k+1} = \nu_k + \Delta\nu$, $\nu_0 = 0$, $\nu_l = L$ соответствует моменту когда $\mu_l = 1$. Схема решения системы уравнений (1.13) при помощи метода Ньютона примет вид

$$\begin{cases} z_{(k)}^{(i+1)} = z_{(k)}^{(i)} - \left[\frac{\partial \Psi_k}{\partial z}(z_{(k)}^{(i)}) \right]^{-1} \Psi_k(z_{(k)}^{(i)}), & i = 1, \dots, r_k - 1 \\ z_{(k)}^{(0)} = 2z_{(k-1)}^{(r_{k-1})} - z_{(k-2)}^{(r_{k-2})}. \end{cases} \quad (1.14)$$

Невязку на последнем шаге (по i) возьмем в форме

$$\Psi_k(z_k^{(r_k)}) = \varepsilon_k^{(r_k)}.$$

Теорема 1.3 Пусть

1) для $k = 1, \dots, l - 1$ выполняется условие

$$\|\varepsilon_k^{(r_k)}\| < \varepsilon; \quad (1.15)$$

2) в шаре $B(x_0, R)$ единственным образом разрешимы задачи Коши (0.1), (1.1) для $\forall x \in B(x_0, R)$;

3) выполняется неравенство

$$\|\Psi'_k(z_1) - \Psi'_k(z_2)\| \leq \gamma \|z_1 - z_2\|, \quad \forall z_1, z_2 \in B(z_0, R),$$

где

$$\Psi'_k(z) = \begin{pmatrix} F'(x) & F(x_0) \\ 2(x - x_{k-1}) & 2(\mu - \mu_{k-1}) \end{pmatrix};$$

$$4) \exists [\Psi'_k(z)]^{-1}, \quad \|[\Psi'_k(z)]^{-1}\| \leq m, \quad \forall z \in B(z_0, R);$$

пусть $q = 0.5m^2\gamma\eta < \beta < 1$, где $\eta \geq \|\varepsilon_k^{(r_k)}\|$ для $k = 1, \dots, l-1$, а ε определена так, чтобы имело место неравенство

$$0.5m^2\gamma\varepsilon < \beta < 1 \quad \text{и} \quad R' = lm\eta \sum_{k=0}^{+\infty} q^{2^k-1} < R,$$

тогда в замкнутом шаре $\overline{B(z_0, R')}$, существует точка x определяющая начальное значение, при $t = a$, решения краевой задачи и при выборе шага сетки из соотношения

$$\Delta\nu = \frac{2\beta - m^2\varepsilon\gamma}{m^2\gamma(c_1 + c_2)},$$

где $\|F'(\xi^{k+1})\| \leq c_1$, $\|F(x_0)\| \leq c_2$, $\xi^{k+1} \in B(x_{k+1}^{(0)}, \Delta\nu)$, последовательные приближения $z_k^{(i)}$, вычисленные по итерационной схеме (1.14), при $i \rightarrow \infty$ сходятся к z_k так, что

$$\|z_k^{(i)} - z_k\| \leq m\eta \frac{q^{2^i-1}}{1 - q^{2^i}}$$

Доказательство. Покажем, что выполняются все условия теоремы 1 о сходимости метода Ньютона-Канторовича применительно к уравнению (1.13) для любого $k = 1, \dots, l-1$.

Если это так, тогда можно заключить, что для любого k система уравнений (1.13) в замкнутом шаре $\overline{B(z_k^{(0)}, r')}$, где $r' = m\eta \sum_{j=0}^{+\infty} q^{2^j-1}$ имеет единственное решение z_{k+1} , к которому сходятся приближения $z_{k+1}^{(i)}$, вычисленные по итерационной формуле (1.14).

Предположим, что найдено приближенное решение $z_k^{(r_k)}$ уравнения $\Psi_k(z) = 0$ и $z_{k-1}^{(r_{k-1})}$ уравнения $\Psi_{k-1}(z) = 0$. Начальное приближение к решению уравнения $\Psi_{k+1}(z) = 0$ будем искать по формуле [24]

$$z_{k+1}^{(0)} = 2z_k^{(r_k)} - z_{k-1}^{(r_{k-1})} = z_k^{(r_k)} + \Delta\nu e_k$$

$$e_k = \frac{z_k^{(r_k)} - z_{k-1}^{(r_{k-1})}}{\|z_k^{(r_k)} - z_{k-1}^{(r_{k-1})}\|}, \quad e_k = (e_{kx}, e_{k\mu}),$$

По формуле Лагранжа[33] имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k+1}^{(0)} &= \Psi_{k+1}(z_{k+1}^{(0)}) = \\ &= \left(\begin{array}{c} F(x_k^{(r_k)} + \Delta\nu e_{kx}) - (1 - (\mu_k^{(r_k)} + \Delta\nu e_{k\mu}))F(x_0) \\ \|x_k^{(r_k)} + \Delta\nu e_{kx} - x_k^{(r_k)}\|^2 + (\mu_k^{(r_k)} + \Delta\nu e_{k\mu} - \mu_k^{(r_k)})^2 - \Delta\nu^2 \end{array} \right) = \\ &\left(\begin{array}{c} F(x_k^{(r_k)}) - (1 - \mu_k^{(r_k)})F(x_0) + \int_0^1 F'(x_k^{(r_k)} - \theta(\Delta\nu e_{kx}))d\theta \Delta\nu e_{kx} + \Delta\nu e_{k\mu} F(x_0) \\ 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Таким образом, переходя к нормам, получаем

$$\|\varepsilon_{k+1}^{(0)}\| \leq \varepsilon + (\|F'(\xi_k^{(r_k)})e_{kx}\| + \|F(x_0)e_{k\mu}\|)\Delta\nu,$$

где $\xi_k^{(r_k)} \in B(x_k^{(r_k)}, \Delta\nu)$.

Зафиксируем $\beta < 1$ и выбираем $\Delta\nu$ из условия

$$0.5m^2\gamma\eta < \beta \quad \text{и} \quad 0.5m^2\gamma\varepsilon < \beta,$$

тогда

$$\Delta\nu = \frac{2\beta - m^2\gamma\varepsilon}{(c_1 + c_2)m^2\gamma}.$$

Следовательно, при выполнении всех условий данной теоремы выполняются условия теоремы о сходимости метода Ньютона-Канторовича для $k = 1, \dots, l$. На ее основании заключаем, что при каждом $k = 1, \dots, l$ система уравнений (1.13) в шаре $\overline{B(z_k^{(0)}, r')}$, где $r' = m\eta \sum_{j=0}^{+\infty} q^{2^j-1}$ имеет решение и процесс (1.14) является сходящимся. Поэтому при $\nu_l = L$ ($\mu_l = 1$) нахождение решения системы (1.13) эквивалентно нахождению решения системы $F(x) = 0$ и действительно дает в замкнутом шаре $\overline{B(z_0, R')}$ начальное значение решения краевой задачи. При этом $R' = lm\eta \sum_{j=0}^{+\infty} q^{2^j-1} < R$. Теорема доказана.

Отметим, что достоинством данного подхода является требование обратимости матрицы $\Psi'_k(z)$, а не матрицы $F'(x)$, определяющей итерационный процесс (1.7), которая может оказаться вырожденной [36].

Величина L – длина кривой множества решений системы уравнений (1.5) заранее неизвестна, поэтому при решении системы уравнений (1.12) на последнем l – ом шаге значение параметра μ принимается равным единице, а неизвестными являются компоненты вектора x и приращение $\Delta\nu_l$.

Следует иметь в виду, что вышеизложенный алгоритм будет надежно работать только в том случае, если на $[a, b]$ удастся проинтегрировать

задачу Коши (0.1), (1.1). Это же возможно сделать далеко не всегда. Вычислительные трудности могут возникнуть при неудачном выборе начальных условий (1.1), а также если система ОДУ (0.1) плохо обусловлена [2], например, является жесткой [27], [47].

В этом случае можно применить следующий подход, см., например, [22]. В систему ОДУ (0.1) вводится параметр δ таким образом, чтобы при $\delta = 0$ получалась успешно решаемая методом пристрелки на $[a, b]$ краевая задача, имеющая решение $y = y^{(0)}(t)$, а при $\delta = 1$ получалось бы решение исходной задачи (0.1) – (0.2). При этом предполагается, что задача имеет для $0 \leq \delta \leq 1$ непрерывное решение

$$y = y(t, \delta), \quad (1.16)$$

удовлетворяющее условию $y(t, 0) = y^{(0)}(t)$.

Пусть система ОДУ является сингулярно возмущенной, т.е. имеет вид

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad (1.17)$$

где ε – малый параметр, $\varepsilon \ll 1$.

Тогда параметр δ в систему (1.17) можно ввести, например, следующим образом

$$(1 - \delta(1 - \varepsilon)) \frac{dy}{dt} = f(t, y). \quad (1.18)$$

При $\delta = 0$ система ОДУ (1.18) принимает вид (0.1) и предполагается, что решение $y = y^{(0)}(t)$ соответствующей краевой задачи может быть легко получено методом пристрелки, а при $\delta = 1$ получается исходная система ОДУ (1.17).

Может быть предложен следующий вычислительный алгоритм решения краевой задачи (1.17), (0.2).

Дискретный вариант. Отрезок $[0, 1]$ изменения параметра δ разбивается на m частей $\delta_0 = 0 < \delta_1 < \delta_2 < \dots < \delta_m = 1$. Для каждого значения $\delta = \delta_k$, $k = 1, 2, \dots, m$ методом пристрелки отыскивается решение задачи (1.18), (0.2), причем в качестве начальных условий (1.1) на k – ом шаге продолжения по переменной δ принимаются условия, полученные при решении задачи на предыдущем $k - 1$ – ом шаге. Полагаем, что решение задачи $y = y^{(0)}(t)$ при $\delta = 0$ может быть получено.

Непрерывный вариант. Находится решение $y = y^{(0)}(t)$ краевой задачи (1.18), (0.2) при $\delta = 0$. Решение (1.16) этой задачи является функцией параметра δ , поэтому при решении методом пристрелки систему ОДУ (1.18) и условия (1.1) можно продифференцировать по этому параметру.

При этом получается начальная задача линейная относительно функции $Y = \frac{\partial y(t, \delta)}{\partial \delta}$

$$(1 - \delta(1 - \varepsilon)) \frac{dY}{dt} - \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} Y = \frac{1 - \varepsilon}{1 - \delta(1 - \varepsilon)} f(t, y),$$

$$Y_1(a) = 0, Y_2(a) = 0, \dots, Y_n(a) = 0.$$

После определения решения $Y^{(m)}$ этой задачи на m – ом шаге, решение $y^{(m+1)}$ начальной задачи (1.18), (1.1) на $m + 1$ – ом шаге может быть найдено, например, по формуле

$$y^{(m+1)} = y^{(m)} + Y^{(m)} \Delta \delta_m,$$

где $\Delta \delta_m = \delta_{m+1} - \delta_m$ – приращение параметра δ на m – ом шаге.

Линейная задача получается также в том случае, если к краевой задаче (0.1), (0.2) применить метод Ньютона – Канторовича [14]. Такой подход широко использовался при решении краевых задач в [3].

Вычислительный алгоритм решения начальной задачи (0.1), (1.1) можно также улучшить, преобразовав ее к наилучшему аргументу λ , [36]. Тогда преобразованная задача примет вид

$$\frac{dy}{d\lambda} = \frac{f(t, y)}{\sqrt{1 + (f, f)}}, \quad \frac{dt}{d\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f, f)}}, \quad (1.19)$$

$$y_1(0) = x_1, y_2(0) = x_2, \dots, y_n(0) = x_n, \quad (1.20)$$

где выражение (f, f) задает скалярное произведение.

Некоторые преимущества, которыми обладает преобразованная задача (1.19), (1.20) по сравнению с непреобразованной (0.1), (1.1), отмечены в [36].

Еще один способ улучшения вычислительного процесса решения начальной задачи (0.1), (1.1) заключается в использовании вложенных отрезков: $[a, b_0] \subset [a, b_1] \subset \dots \subset [a, b_k]$, где $b_0 < b_1 < \dots < b_k = b$, см., например, [49]. При отыскании решения на отрезке $[a, b_i]$, $1 \leq i \leq m$ принимается начальное условие (1.1), полученное при решении задачи на предыдущем отрезке $[a, b_{i-1}]$, а краевое условие (0.2) удовлетворяется в точке $t = b_i$. Предполагается, что на наименьшем отрезке $[a, b_0]$ решение может быть получено.

1.2. Численные исследования

Пример 1. Рассмотрим следующую краевую задачу [18]

$$\begin{cases} \ddot{y} = 1, \\ y(0) = 0, \quad F(\dot{y}(1) - 1) = 0. \end{cases} \quad (1.21)$$

Пусть $F(x)$ имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} -x + 2, & x \in (-\infty, 1], \\ 1, & x \in [1, 2], \\ -x + 3, & x \in [2, +\infty). \end{cases} \quad (1.22)$$

Примем начальное приближение $\dot{y}(0) = x_0 = 0$.

На отрезке кривой $F = F(x)$, который параллелен оси x , матрица Якоби, не преобразованной к наилучшему параметру системы, будет вырожденной, и, следовательно, итерационные схемы метода Ньютона и метода Лаэя не приводят к решению. Схема, использующая наилучший параметр ν , позволяет получить достоверное решение задачи. Часть кривой $p = p(\mu)$, ведущей от начального приближения к решению задачи, представлена на рисунке (см. рис. 1.1).

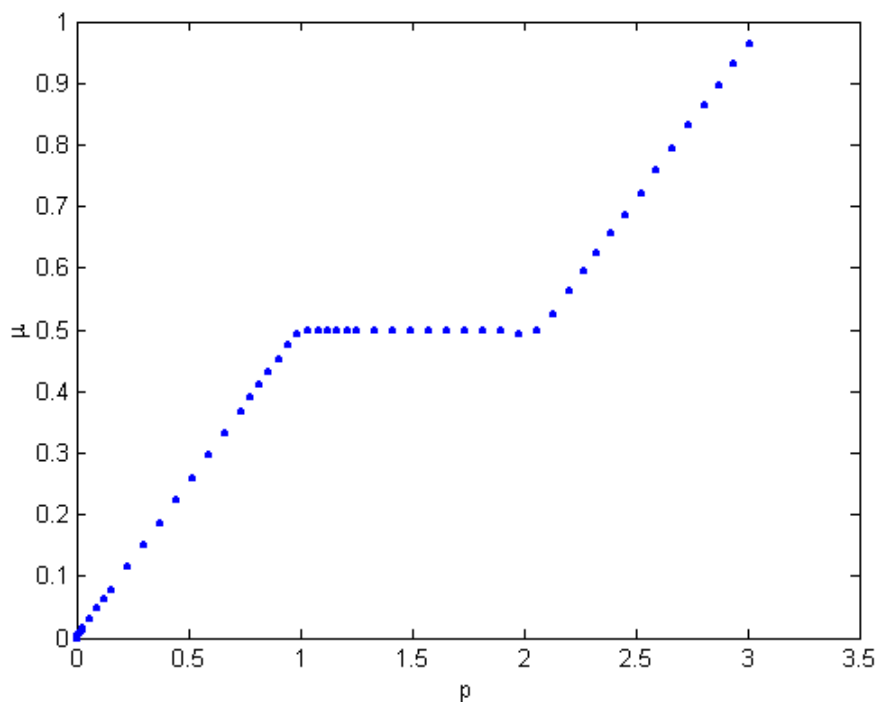


Рис. 1.1.

Пример 2. Рассмотрим краевую задачу для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения [16]

$$\begin{cases} \varepsilon u'' = (1-t)u' - (1+2u')u, & \varepsilon = 0.01, \\ u(0) = 1/2, \\ u(1) = 0. \end{cases} \quad (1.23)$$

Метод стрельбы преобразует краевую задачу (1.23) в начальную

$$\begin{cases} \varepsilon u'' = (1-t)u' - (1+2u')u, & \varepsilon = 0.01 \\ u(0) = 1/2, \\ u'(0) = p. \end{cases} \quad (1.24)$$

При некоторых значениях p (например, $p = 2$) решение начальной задачи (1.24) неограниченно возрастает на отрезке $[0, 1]$. Поэтому начальное условие не позволяет применить описанные схемы. Используя же, например, схему Лаэя на вложенных отрезках можно прийти к верному значению неизвестного параметра p .

Пример 3. Рассмотрим краевую задачу для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения [20]

$$\begin{cases} \varepsilon u'' = u - u^4, \\ u(0) + u'(0) = 0, \\ u(1) = 1/2. \end{cases} \quad (1.25)$$

Методом стрельбы преобразуем краевую задачу (1.25) в начальную

$$\begin{cases} \varepsilon u'' = u - u^4, \\ u(0) = p, \\ u'(0) = -p. \end{cases} \quad (1.26)$$

Введем обозначение $u(x, p)$ для решения начальной задачи (1.26). На рис. 1.2 приведен график функции $u(1, p)$ для $\varepsilon = 0.1$.

Из графика следует, что существует два решения краевой задачи (1.25). Пусть p_1^* и p_2^* значения параметра p , удовлетворяющего краевым условиям

$$\begin{cases} u(0) + u'(0) = 0, \\ u(1) = 1/2. \end{cases} \quad (1.27)$$

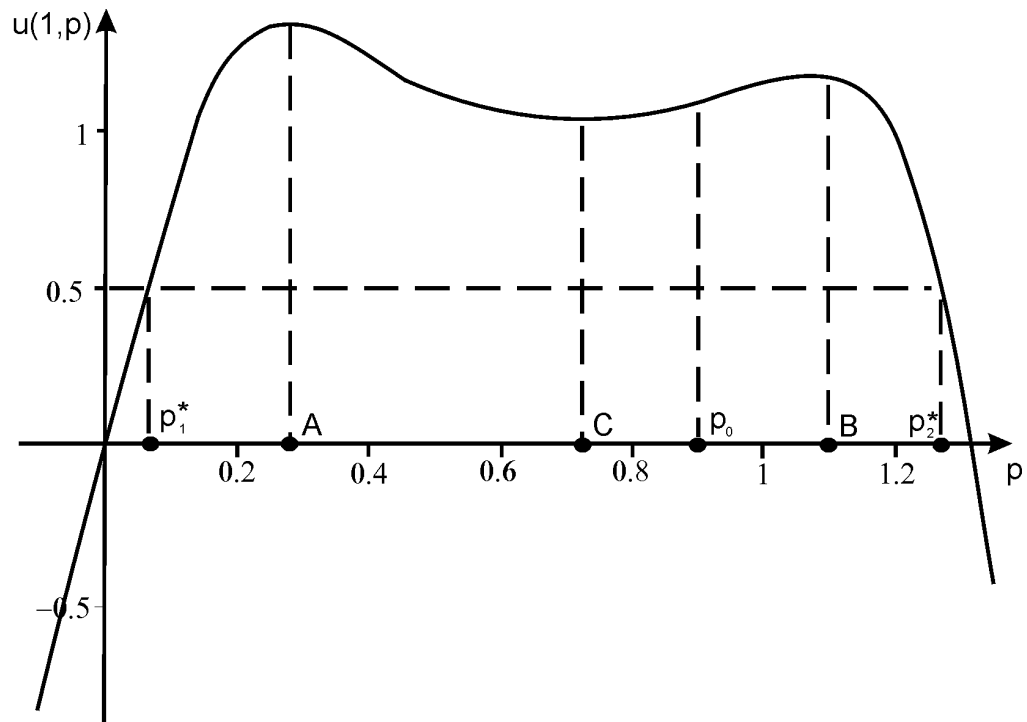


Рис. 1.2.

Применим полученные схемы для решения данного примера. Пусть начальное значение p_0 выбирается между точками А и С, или между точками В и С. Численные эксперименты показали, что метод Лаэя не приводит к решению задачи. Схема с наилучшим параметром позволяет получить как p_1^* , так и p_2^* , путем выбора направления движения вдоль кривой.

Для того, чтобы лучше понять поведение двух методов, рассмотрим вспомогательную задачу. Найдем корни уравнения

$$F(x) = -x^2(x^2 - 1) + 1 = 0, \quad (1.28)$$

используя метод Лаэя и метод преобразования к наилучшему параметру. График функции (1.28) представлен на рис. 1.3.

Метод Лаэя. Пусть начальное приближение x_0 , выбрано из отрезка $[C, B]$. Параметризация выглядит следующим образом

$$\Phi(x, \mu) = F(x) - (1 - \mu)F(x_0).$$

Параметр $\mu \in [0, 1]$ изменяется так, что $(1 - \mu)F(x_0)$ монотонно убывает, однако, видно, что $F(x)$ не является монотонной, ни на отрезке $[D, x_0]$, ни на $[x_0, E]$. Произведем разбиение отрезка, на котором изменяется μ

$$0 = \mu_0 < \mu_1 < \dots < \mu_m = 1.$$

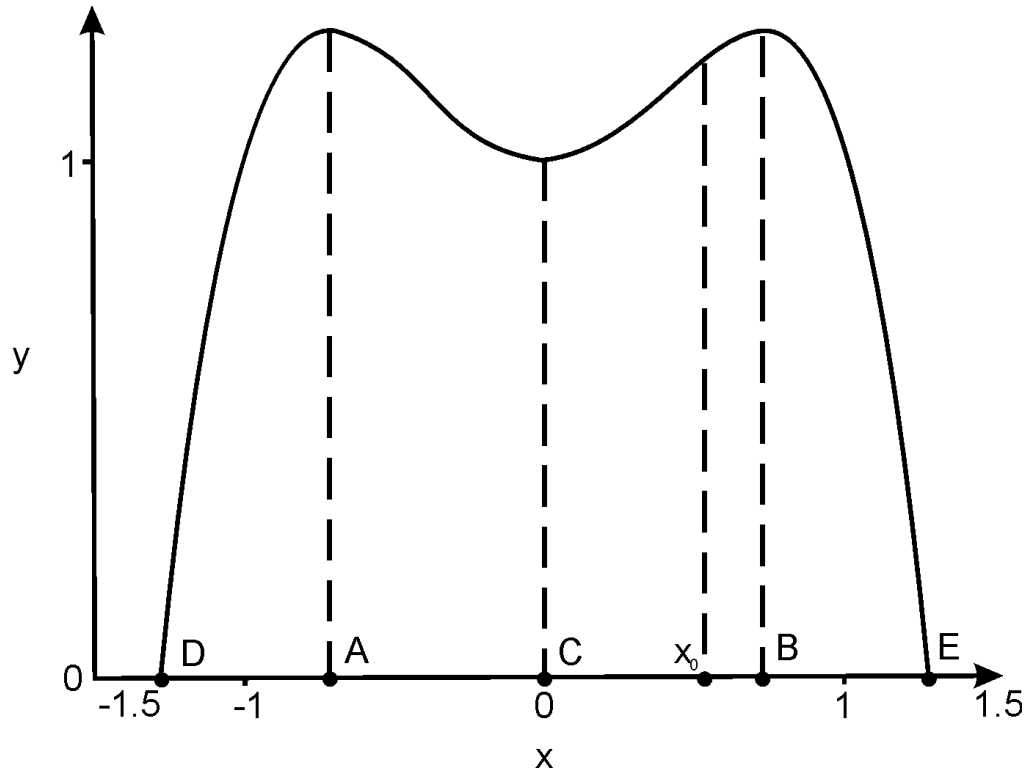


Рис. 1.3.

Тогда на первом шаге, следуя методу Лаэя, решаем уравнение

$$\Phi(x, \mu_1) = F(x) - (1 - \mu_1)F(x_0) = 0,$$

что эквивалентно нахождению точки пересечения графиков функций $y = F(x)$ и $y = (1 - \mu_1)F(x_0)$. Начальным приближением для метода Ньютона является точка x_0 и на отрезке $[C, B]$ выполняются условия сходимости метода. Поэтому, получаем точку x_1 . Аналогичным образом, получаем и другие точки, до тех пор, пока не подойдем к такому μ_k , что $F(C) > (1 - \mu_k)F(x_0)$. Нахождение точки x_{k1} или x_{k2} всецело зависит от начального приближения k -го шага метода Лаэя. Следует отметить, что условия сходимости метода Ньютона в данном случае нарушаются. Например, при разбиении отрезка на семь частей ($x_0 = 0.5$), метод Ньютона входил в бесконечный цикл и выдавал точки лежащие в малой окрестности точки C.

В случаях, когда находится точка x_{k1} или x_{k2} по методу Лаэя, требуется совершить скачок по x на одну из ветвей функции (1.28), что иллюстрируется примерами на рис. 1.4. По оси абсцисс отложен x , непрерывной линией показана функция $F(x)$, окружностями показаны точки $\{x_j, (1 - \mu_j)F(x_0)\}$, где x_j соответствует μ_j .

При этом направление перескока (вправо, влево) к корню, может быть весьма непредсказуемым, и зависеть, например, от точности метода Ньютона или от плотности сетки по μ . Понятно, что этот перескок может

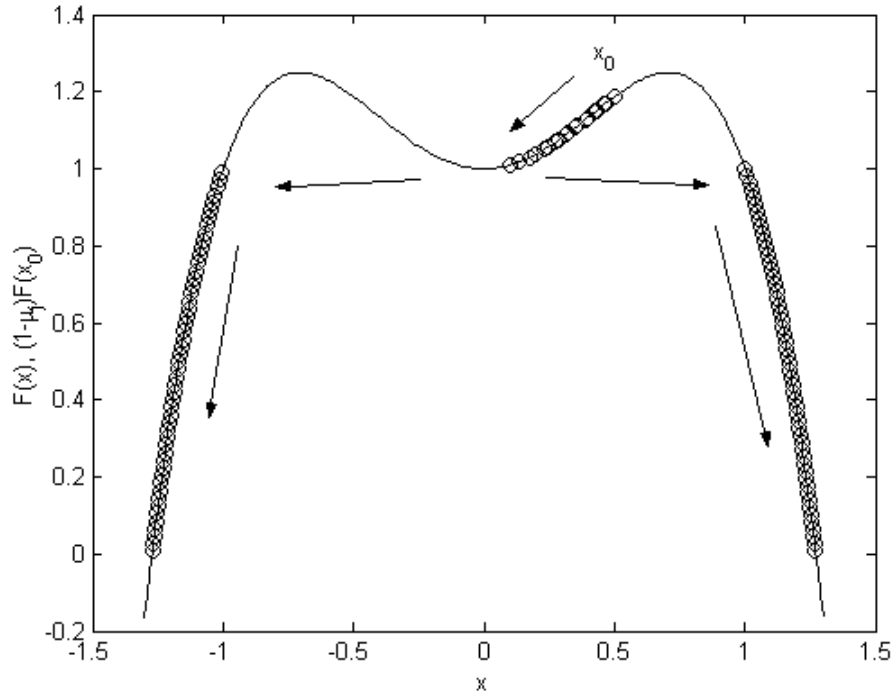


Рис. 1.4.

совершаться в такую точку, где функция не определена, или точку подобную данной, где нарушается монотонность функции.

Наилучшая параметризация. Для наилучшей параметризации параметр μ равноправен с x , и может меняться немонотонно. Следующее значение μ получается лишь на основе решения на $(i + 1)$ -м шаге системы уравнений

$$\begin{cases} \Psi_1(x, \mu) = F(x) - (1 - \mu)F(x_0) = 0, \\ \Psi_2(x, \mu) = (x - x_{(i)})^2 + (\mu - \mu_i)^2 - \Delta\nu_i^2 = 0, \end{cases} \quad (1.29)$$

и определяется лишь близостью $F(x)$ и $F(x_0)(1 - \mu)$, поэтому мы идем вдоль кривой $y = F(x)$ до значения $\mu = 1$. Можно управлять поиском того или иного корня, задавая направление движения вдоль кривой. На рис. 1.5, по оси абсцисс отложен x , непрерывной линией показана функция $F(x)$, окружностями показаны точки $\{x_j, (1 - \mu_j)F(x_0)\}$, где x_j соответствует μ_j .

Пример 4. (Задача двух тел.) Рассмотрим краевую задачу (см. [38]):

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, & \ddot{y} &= -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \\ x(0) &= a_1, y(0) = a_2, x(T) = b_1, y(T) = b_2. \end{aligned} \quad (1.30)$$

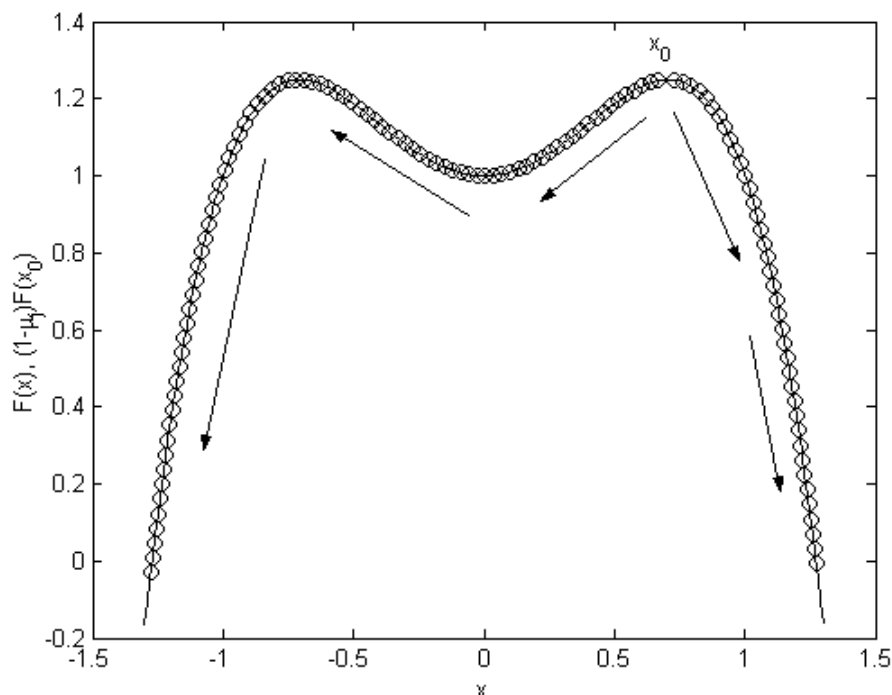


Рис. 1.5.

С помощью метода пристрелки приведем краевую задачу к задаче Коши и системе нелинейных уравнений.

Параметризация при решении нелинейного уравнения.

а) *Продолжение по параметру.*

Рассмотрим систему нелинейных уравнений

$$\Phi(p) = 0. \quad (1.31)$$

Предполагаем, что $\Phi : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$ гладкая функция и существует решение уравнения (1.31). Запишем его в следующей форме

$$\Phi(p) = (1 - \mu)\Phi(p_0), \quad \mu \in [0, 1], \quad (1.32)$$

Здесь $p_0 \in \mathbb{R}^m$ некоторая фиксированная точка. Очевидно, что при $\mu = 0$, $p = p_0$, а при $\mu = 1$, $\Phi(p) = 0$, т.е. p удовлетворяет исходному уравнению (1.31).

Таким образом, следует ожидать, что при изменении μ от 0 до 1 параметр p будет меняться от произвольного начального приближения p_0 до решения системы. Найти функцию $\mu \mapsto p(\mu)$ можно, дифференцируя соотношение (1.32) по μ

$$\Phi'(p(\mu)) \frac{dp(\mu)}{d\mu} = -\Phi(p_0).$$

Итак, нахождение решения (1.30) сводится к интегрированию системы

$$\begin{aligned} \frac{dp(\mu)}{d\mu} &= -[\Phi'(p(\mu))]^{-1}\Phi(p_0), \\ p(\mu)|_{\mu=0} &= p_0, \quad 0 \leq \mu \leq 1 \end{aligned} \quad (1.33)$$

от 0 до 1.

б) *Метод пристрелки с продолжением по параметру*

Рассмотрим краевую задачу

$$\dot{x} = f(t, x), \quad a \leq t \leq b, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad R(x(a), x(b)) = 0. \quad (1.34)$$

Здесь $f : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, $R : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ гладкие функции. Предполагается существование решения для системы (1.34).

Идея метода пристрелки в сведении систем подобных (1.34) к задаче Коши и системе нелинейных уравнений. Построим схему процесса.

Выберем точку $t_* \in [a, b]$ и рассмотрим задачу Коши

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x|_{t=t_*} = p \in \mathbb{R}^n. \quad (1.35)$$

Решение начальной задачи (1.35) обозначим как

$$x(t, p), \quad a \leq t \leq b. \quad (1.36)$$

Понятно, что функция (1.36) должна обращать в тождество граничные условия

$$\Phi(p) \equiv R(x(a, p), x(b, p)) = 0. \quad (1.37)$$

Для решения уравнения (1.37) воспользуемся методом продолжения по параметру из раздела а). Получим $\Phi'(p)$

$$\Phi'(p) = R'_x \frac{\partial x(a, p)}{\partial p} + R'_y \frac{\partial x(b, p)}{\partial p}. \quad (1.38)$$

Введем обозначения

$$X(t, p) = \frac{\partial x(t, p)}{\partial p}. \quad (1.39)$$

Функцию $X(t, p)$ можно найти, дифференцируя по p систему (1.35)

$$\dot{X} = AX, \quad X|_{t=t_*} = I, \quad a \leq t \leq b, \quad (1.40)$$

где $n \times n$ матрица

$$A = A(t, p) \equiv f'_x|_{x=x(t,p)}, \quad (1.41)$$

а I – единичная матрица.

Задача Коши имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dp(\mu)}{d\mu} &= -[\Phi'(p(\mu))]^{-1}\Phi(p_0), \\ p(\mu)|_{\mu=0} &= p_0, \quad 0 \leq \mu \leq 1, \end{aligned}$$

где

$$\Phi(p) = R(x(a, p), x(b, p)), \quad (1.42)$$

$$\Phi'(p) = R'_x(x(a, p), x(b, p))X(a, p) + R'_y(x(a, p), x(b, p))X(b, p). \quad (1.43)$$

Целесообразно вычислять $x(t, p)$, $X(t, p)$ параллельно.

с) *Наилучший параметр продолжения.*

Пусть дана система

$$F_j(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (1.44)$$

нелинейных алгебраических или трансцендентных уравнений относительно $n+1$ неизвестных x_1, x_2, \dots, x_{n+1} . Известно, что проблема нахождения параметра продолжения (для системы (1.44)) решается выбором наилучшего параметра [36]. Этим наилучшим параметром является длина λ , отсчитываемая вдоль кривой (задаваемой (1.44)). Локально такой параметр совпадает по направлению с касательной к этой кривой. Выбор λ в качестве параметра продолжения требует предположения, что x_i суть функции λ , т.е.

$$x_i = x_i(\lambda) \quad (i = 1, 2, \dots, n+1). \quad (1.45)$$

Чтобы определить λ , необходимо дополнительное соотношение, устанавливающее связь между x_i и λ . Локально эта связь очевидна:

$$d\lambda^2 = \sum_{i=1}^{n+1} dx_i^2. \quad (1.46)$$

Так как соотношение (1.46) – дифференциальное, то следует перевести систему (1.44) в эквивалентную ей дифференциальную форму – задачу Коши по параметру λ . Получаем следующую задачу Коши

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \frac{dx_i}{d\lambda} = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{dx_i}{d\lambda} \right)^2 = 1,$$

$$x_i(\lambda_0) = x_{i0} \quad (i = 1, 2, \dots, n+1). \quad (1.47)$$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \quad (1.48)$$

$$y : \mathbb{R}^1 \mapsto \mathbb{R}^n, \quad f : \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^1.$$

Имеет место следующая

Теорема. [36] *Если задача Коши для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.48) имеет единственную гладкую интегральную кривую, то для того чтобы эту задачу преобразовать к наилучшему аргументу, необходимо и достаточно выбрать в качестве такого аргумента длину дуги λ , отсчитываемую от начальной точки вдоль интегральной кривой задачи. При этом задача (1.48) преобразуется в задачу*

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\lambda} &= \pm \frac{f}{\sqrt{1 + \sum_{j=1}^n f_j^2}}, \quad y(0) = y_0, \\ \frac{dt}{d\lambda} &= \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{j=1}^n f_j^2}}, \quad t(0) = t_0. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Численное решение.

В этом разделе будут сравниваться два метода решения - продолжение по параметру и наилучшему параметру.

Общая часть.

Систему (1.30) можно записать в следующем виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3, & x_1(0) = a_1, \quad x_1(T) = b_1, \\ \dot{x}_2 = x_4, & x_2(0) = a_2, \quad x_2(T) = b_2, \\ \dot{x}_3 = -x_1(x_1^2 + x_2^2)^{-3/2}, \\ \dot{x}_4 = -x_2(x_1^2 + x_2^2)^{-3/2}. \end{cases}$$

Для набора

$$T = 7, \quad a_1 = 2., \quad a_2 = 0, \quad b_1 = 1.0738644361, \quad b_2 = -1.0995343576,$$

выберем в начальный момент времени $t_* = 0$ приближение для начальных условий

$$p_{01} = [2., 0., -0.5, 0.5] \quad \text{и} \quad p_{02} = [2., 0., 0.5, -0.5]. \quad (1.50)$$

Рассмотрим ключевые моменты (и общие для каждого из методов) преобразования системы. Очевидно, что нам не обязательно вводить вектор $p = [p_1, p_2, p_3, p_4]$, состоящий из четырех неизвестных. В данном случае достаточно и двух, так как у нас есть $x_1(0)$ и $x_2(0)$. Этот шаг позволяет сократить время вычислений и работать с минимальными размерностями, входящих в вычисления матриц.

Граничные условия принимают вид

$$\begin{cases} x_1(T, p) - b_1 = 0, \\ x_2(T, p) - b_2 = 0. \end{cases} \quad (1.51)$$

Интегрирование задач Коши (1.35) и (1.40) производится стандартной подпрограммой Maple `dsolve` с помощью метода `rkf45` (метод Рунге-Кутты-Фельберга порядка 4(5) см.[15]) с точностью равной 10^{-5} .

Далее идет, характерный для каждого из методов, переход к интегрированию по явной схеме Эйлера.

а) продолжение по параметру.

Для системы (1.33) можем выписать явную схему Эйлера.

$$p_{k+1} = p_k - [\Phi'(p_k)]^{-1} \Phi(p_0) \Delta\mu_k,$$

$$p_0 = p_{0i}, \quad \mu_0 = 0, \quad \mu_{k+1} = \mu_k + \Delta\mu_k, \quad k = 1, 2, \dots, s. \quad (1.52)$$

Здесь вектор p_{0i} ($i = 1, 2$) суть данные начальные приближения (1), $\Delta\mu_k$ - шаг интегрирования. Следует отметить, что конечное значение $\mu_s = 1$. Это связано с построением процесса нахождения решения. Поэтому критерий остановки процесса (1.52) есть $\mu_{k+1} = 1$.

б) продолжение по наилучшему параметру.

Рассмотрим систему после введения параметра μ

$$\Psi(p, \mu) \equiv \Phi(p) - (1 - \mu)\Phi(p_0) = 0, \quad (1.53)$$

и запишем ее в дифференциальной форме для продолжения по наилучшему параметру

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial p_1} \frac{dp_1}{d\lambda} + \frac{\partial \Psi_i}{\partial p_2} \frac{dp_2}{d\lambda} + \frac{\partial \Psi_i}{\partial \mu} \frac{d\mu}{d\lambda} = 0, \quad i = 1, 2,$$

$$\left(\frac{dp_1}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dp_2}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{d\mu}{d\lambda}\right)^2 = 1,$$

$$p_0 = p_{0i}, \quad \mu_0 = 0. \quad (1.54)$$

Схема явного метода Эйлера примет вид

$$x_{(0)} = p(\lambda_0), \quad x'_{(-1)^*} = (0, 0, 1),$$

$$x_{(k+1)} = x_{(k)} + x'_{(k)^*} \Delta \lambda_k, \quad (1.55)$$

$$x'_{(k)^*} = \frac{x'_{(k)}}{\|x'_{(k)}\|_2}, \quad x'_{(k)} = \left[\begin{array}{c} J_{(k)} \\ x'_{(k-1)^*} \end{array} \right]^{-1} \left[\begin{array}{c} \vec{0} \\ 1 \end{array} \right].$$

Здесь $\|\cdot\|_2$ - евклидова норма вектора, $x_k = (p_{1(k)}, p_{2(k)}, \mu_{(k)})$,

$$J_k = \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial \Psi_1}{\partial p_1} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial p_2} & \frac{\partial \Psi_1}{\partial \mu} \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial p_1} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial p_2} & \frac{\partial \Psi_2}{\partial \mu} \end{array} \right)_{(k)} = \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_1} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_2} & \Phi_1(p_0) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial p_1} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial p_2} & \Phi_2(p_0) \end{array} \right)_{(k)}.$$

Тесты и результаты.

Для сравнения 2 методов используем набор из 3 тестов.

Далее предполагается, что "начальное значение - решение" дается следующей таблицей (табл. 1) [38].

Таблица 1

$p_0 N$	Нач.знач.	Решение
1	(-0.5, 0.5)	(0.0000004834, 0.5000000745)
2	(0.5, -0.5)	(0.4510782034, -0.2994186665)

Сокращения:

П - результат для метода продолжения по параметру.

НП - результат для метода продолжения по наилучшему параметру.

1) Сопоставление производится по приближению к решению и количеству шагов (при которых достигается данное приближение). Для наилучшего параметра это шаг вдоль кривой.

Таблица 2

p_0N	Шаг	П	НП
1	0.01	(-.0018, .5017)	(.0028, .5003)
2	0.01	(.4508, -.2996)	(.4506, -.2977)
1	0.05	(-.0092, .5084)	(.0090, .5031)
2	0.05	(.4499, -.3004)	(.4493, -.2942)
1	0.1	(-.0178, .5157)	(.0304, .5030)
2	0.1	(.4487, -.3014)	(.4472, -.2843)

2) Исследуем максимальное отклонение от искомого решения на отрезке, то есть

$$\Delta^{max} = \max_{0 \leq \mu \leq 1} \|\varphi(\mu) - p(\mu)\|_2,$$

где $\varphi(\mu)$ - "точное" решение, полученное методом rkf-45.

Таблица 3

p_0N	Шаг	$\Delta_{\text{П}}^{max}$	$\Delta_{\text{НП}}^{max}$
1	0.05	0.01246	0.01064
2	0.05	0.00158	0.00149
1	0.1	0.02382	0.02071
2	0.1	0.00311	0.00293

3) Сделаем одинаковым количество обращений к правой части. Пусть h шаг метода простого продолжения, тогда новый шаг

$$\hat{h} = \frac{h}{\sqrt{(1 + f_j f_j)}}.$$

Таблица 4

p_0N	Шаг	П	НП
1	0.01	(-.0027, .5018)	(.0028, .5003)
2	0.01	(.4508, -.2999)	(.4506, -.2977)
1	0.05	(-.0183, .5097)	(.0090, .5031)
2	0.05	(.4503, -.3050)	(.4493, -.2942)
1	0.1	(-.0239, .5157)	(.0304, .5030)
2	0.1	(.4487, -.3014)	(.4472, -.2843)

Параметризация движения по эллипсу.

В предыдущем разделе была проведена параметризация уравнения $\Phi(p) = 0$, при этом на каждом шаге "достаточно точно" интегрировалась система

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), & x(t_*) = p_0, \\ \dot{X} = f'_x(x)X, & X(t_*) = I, \end{cases} \quad (1.56)$$

которая соответствует "внутренней проблеме"[38].

Теперь проведем сравнение непреобразованной системы (1.56) с преобразованной к наилучшему аргументу.

Для простоты будем рассматривать только часть системы (1.56):

$$\dot{x} = f(x), \quad x(t_*) = p_0. \quad (1.57)$$

Начальная задача (1.57) задает движение в поле силы тяжести. Начальные условия выберем следующие

$$T = 10.57, \quad p_0 = (2, 0.0, 0.451078, -0.299418). \quad (1.58)$$

Значение T соответствует полному обходу эллипса.

Очевидно, что при приближении к точке $(0,0)$ на плоскости x_1x_2 система (1.57) будет иметь вырожденный характер. Более аккуратное исследование показывает, что на отрезке $[8,9]$ имеем подобие пограничного слоя. Это говорит о том, что преобразование системы к наилучшему параметру должно дать хорошие результаты.

Далее сравнивается вычислительная ситуация для метода Эйлера, преобразованного и не преобразованного (см. табл. 5).

Сокращения:

Э - результат для метода Эйлера,

НП - результат для метода Эйлера, преобразованного к наилучшему аргументу,

$\Delta x = \max\{|\Delta x_1(T)|, |\Delta x_2(T)|\}$ - отклонение от искомого решения на последнем шаге,

$\Delta v = \max\{|\Delta x_3(T)|, |\Delta x_4(T)|\}$ - отклонение от искомого решения на последнем шаге,

$\Delta_{max}x = \max_{0 \leq t \leq T} \{|\Delta x_1(t)|, |\Delta x_2(t)|\}$ - максимальное отклонение от искомого решения на отрезке,

$\Delta_{max}v = \max_{0 \leq t \leq T} \{|\Delta x_3(t)|, |\Delta x_4(t)|\}$ - максимальное отклонение от искомого решения на отрезке.

Метод	h	Δx	Δv	$\Delta_{max}x$	$\Delta_{max}v$	Количество шагов
НП	0.01	.116	.079	.117	.616	1932
НП	0.005	.057	.040	.058	.331	3885
НП	0.001	.012	.008	.012	.068	19506
Э	0.01	1.49	.660	1.49	.754	1057
Э	0.005	.878	.492	.878	.522	2114
Э	0.001	.200	.153	.200	.153	10570

Пример 5.

а) Рассматривалась краевая задача для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения [47, 12]

$$\varepsilon \ddot{x}(t) - \dot{x}(t) = -\exp(t),$$

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(1) = \beta \quad t \in [0, 1],$$

где β соответствует условию $x(1) = 0$. График функции изображен на рис.1.6.

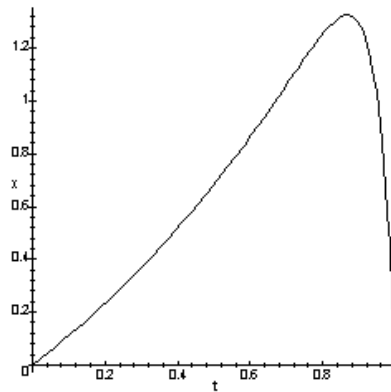


Рис. 1.6.

Сравнение начальных задач.

Задача интегрировалась в обратном направлении

$$\varepsilon \ddot{x}(t) - \dot{x}(t) = -\exp(t),$$

$$x(1) = p, \quad \dot{x}(1) = \beta \quad t \in [0, 1], \quad \varepsilon = 0.05.$$

В таблице представлены результаты. Использованы сокращения:

НП - задача, преобразованная к наилучшему параметру и использующая метод Эйлера,

Э - не преобразованный метод Эйлера,
 h - шаг вдоль оси t или вдоль кривой,
 Δ - максимальная ошибка.

Таблица 6

Метод	h	Δ	Количество шагов
НП	0.1	0.053	373
НП	0.05	0.030	743
НП	0.01	0.0063	3711
НП	0.001	0.000631	37095
Э	0.01	1.45	100
Э	0.001	0.134	1000
Э	0.0001	0.0133	10000
Э	0.00001	0.00133	100000

Графическое представление результатов см. на рис. 1.7.

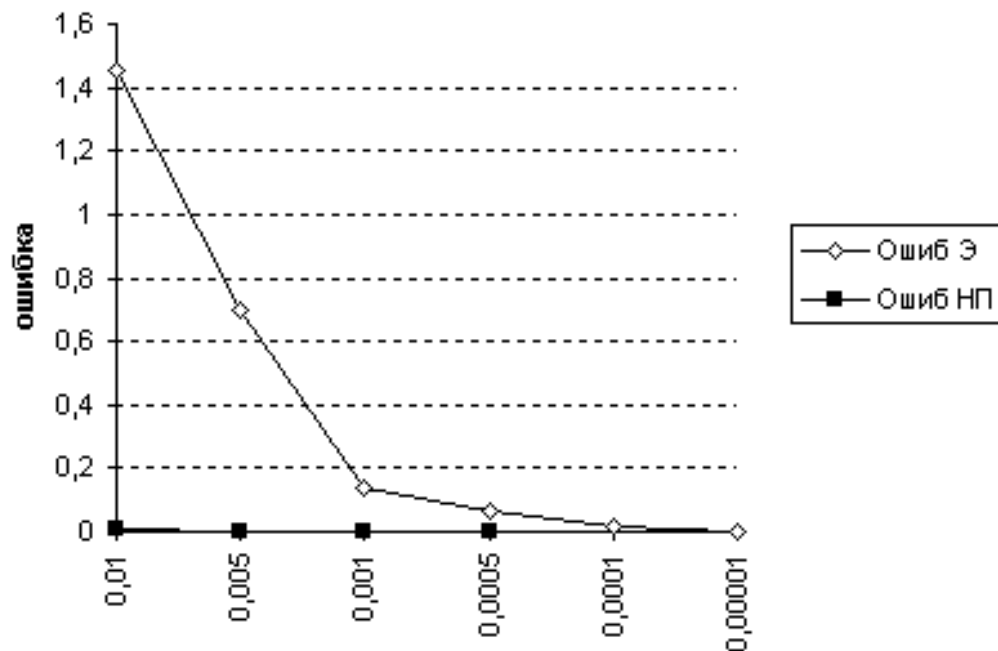


Рис. 1.7.

Краевая задача.

Начальные задачи интегрировались в обратном направлении.

$p_0 = 1$ – первое приближение,

$p_{last} = 0$ – точное значение,

h_{is} – "внутренний" шаг, с которым интегрировалась задача Коши.

h – "внешний" шаг, с которым интегрировалась задача (1.33) или та же задача, но преобразованная к наилучшему параметру.

Метод внеш. (внутр.)	$h(h_{is})$	Δ	Количество шагов
НП(НП)	0.1(0.1)	.0522	14
НП(НП)	0.05(0.1)	.0522	28
НП(НП)	0.1(0.01)	.0522	15
НП(НП)	0.05(0.01)	.022	29
Э(Э)	0.1(0.1)	1.89	10
Э(Э)	0.1(0.01)	0.008	10
Э(Э)	0.01(0.01)	0.008	100
Э(Э)	0.1(0.001)	0.0008	10
Э(НП)	0.1(0.1)	0.08	10
Э(НП)	0.1(0.01)	0.006	10
Э(НП)	0.01(0.01)	0.006	100
Э(НП)	0.1(0.001)	0.0008	10

б) Рассматривалась задача [10]

$$\varepsilon \ddot{x} + (1+t)x = 2.5(1+t),$$

$$x(0) = -1, t \in [0, 1], \varepsilon = 0.003125.$$

В таблице представлены результаты численного эксперимента. Используются сокращения:

НП - задача, преобразованная к наилучшему параметру и использующая метод Эйлера,

Э - непреобразованный метод Эйлера,

h - шаг вдоль оси t или вдоль кривой,

$\Delta x(1)$ - ошибка на последнем шаге,

Δ - максимальная ошибка.

Метод	h	$\Delta x(1)$	Δ	Количество шагов
НП	0.2	0.099	0.127	256
НП	0.05	0.025	0.029	294
НП	0.01	0.0047	0.0053	586
НП	0.005	0.0019	0.0025	935
Э	0.005	-	-	расх.
Э	0.004	0	1.950	250
Э	0.002	0	0.584	500
Э	0.001	0	0.239	1000
Э	0.0001	0	0.020	10000

Пример 6.

Рассмотрим краевую задачу

$$g''(u) = ug(u)^q/q, \quad q < 0 \quad (1.59)$$

с краевыми условиями

$$g'(0) = 0, \quad (1.60)$$

$$\lim_{u \rightarrow 1-0} g(u) = 0, \quad (1.61)$$

$$\lim_{u \rightarrow 1-0} (1-u)g'(u) = 0. \quad (1.62)$$

Нас интересует положительное решение.

Условие (1.62) является ограничением на рост $|g'(u)|$, и при численном интегрировании не конструктивно.

Рассмотрим начальную задачу

$$\begin{cases} x_1' = tx_2^q/q, \\ x_2' = x_1, \\ x_1(0) = 0, \\ x_2(0) = p, \end{cases} \quad (1.63)$$

где $x_1 = g'$, $x_2 = g$, $u = t$. Мы предполагаем, что при некотором $p = p_0$ решение данной задачи эквивалентно решению краевой задачи. Решение $x_2 > 0$, следовательно $p_0 > 0$. Возмущенный параметр $p_0 + \delta$ ($\delta > 0$), как видно из системы (1.63), при численной реализации метода Эйлера доставляет меньший рост производной $x_1 = g'$. При выборе $p_0 - \delta$ процесс решения будет связан с быстрым ростом правой части первого уравнения (1.63). Поэтому, необходимо начинать поиск параметра с $p > p_0$.

Начальная задача.

Будем считать, что p известен. Сравним преобразованную и непреобразованную задачу. При интегрировании используем метод Эйлера.

Для $q = -5$ известно точное решение

$$g(u) = 10^{-1/6}(1 - u^3)^{1/3}. \quad (1.64)$$

Отсюда, $g(0) = 10^{-1/6}$. Во всех случаях интегрирование велось до тех пор, пока текущее время было $\leq 1 - 0.001$.

Сокращения:

Э - результат для метода Эйлера,

НП - результат для метода Эйлера, преобразованного к наилучшему аргументу,

$\Delta_{max}g' = \max_{0 \leq t \leq T} |x_1(t) - g'(t)|$ - максимальное отклонение от производной искомого решения на отрезке,

$\Delta_{max}g = \max_{0 \leq t \leq T} |x_2(t) - g(t)|$ - максимальное отклонение от искомого решения на отрезке,

Таблица 9

Метод	h	t_{last}	$\Delta_{max}g$	$\Delta_{max}g'$	Количество шагов
НП	.001	.999	.008	5.146	28049
НП	.0005	.999	.006	4.84	76000
Э	0.0005	.999	.026	12.962	1998
Э	0.0001	.999	.010	7.16	9990
Э	0.00005	.999	.018	16.28	19980
Э	0.00001	.999	.027	29.95	99900

Пример 7. *Нахождение предельных циклов системы Эквейлера (Eckweiler):*

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \sin(x_2) \end{cases} \quad (1.65)$$

Необходимо найти некоторые предельные циклы данной системы. Поиск цикла накладывает на систему определенные связи.

Ясно, что для замкнутости фазовой кривой системы (1.65) необходимо совпадение точек начала движения (интегрирования) и остановки. Таким образом, получаем условие $x_1(0) = x_1(T)$, $x_2(0) = x_2(T)$ для x_1 , и $x_2(0) = 0$, $x_2(T) = 0$ для x_2 . В эти уравнения связи входит неизвестный период $T =$

x_3 и константа x_4 . Учитывая эти результаты, можем переписать систему (1.65) в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3(-x_1 + \sin(x_2)), \\ \dot{x}_3 = 0, \\ \dot{x}_4 = 0, \\ x_1(0) = x_4(0), x_2(0) = 0, x_1(1) = x_4(1), x_2(1) = 0. \end{cases} \quad (1.66)$$

Численное решение.

Покажем как формируется матрица $\frac{\partial \Phi}{\partial p}$. Параметризуем неизвестные начальные условия $x_i(0) = p_i$ ($i = 1, 3, 4$). Граничные условия имеют вид

$$\begin{cases} x_1(0) - x_4(0) = 0, \\ x_1(1) - x_4(1) = 0, \\ x_2(1) = 0, \end{cases} \quad (1.67)$$

и, следовательно, i -ый столбец матрицы $\frac{\partial \Phi}{\partial p}$ имеет вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1(0)}{\partial p_i} - \frac{\partial x_4(0)}{\partial p_i} \\ \frac{\partial x_1(1)}{\partial p_i} - \frac{\partial x_4(1)}{\partial p_i} \\ \frac{\partial x_2(1)}{\partial p_i} \end{pmatrix}. \quad (1.68)$$

Результаты.

Для начального приближения $p_0 = [2., 2\pi, 2]$ таблица результатов представлена ниже (табл. 10).

Таблица 10

Метод	Результат	Кол-во шагов	Приращение параметра
НП	3.9924, 6.4679, 3.9924	30	0.1
П	3.9716, 6.4647, 3.9716	10	0.1
rkf4(5)	3.9655, 6.4661, 3.9655	-	-

Пример 8. *Нахождение периода предельных циклов в системе Ван-дер-Поля:*

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\lambda(x_1^2 - 1)x_2 - x_1, \end{cases} \quad (1.69)$$

для $\lambda = 10, 2.7721992263175, 0.95893843253661$.

Формулировка данной проблемы как краевой задачи проводится аналогично предыдущему примеру. Теперь, однако, требуется найти неизвестный период для разных значений λ .

Краевая задача имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\lambda(x_1^2 - 1)x_2 - x_1, \\ x_1(0) = x_4(0), x_2(0) = 0, x_1(1) = x_4(1), x_2(1) = 0. \end{cases} \quad (1.70)$$

Численное решение.

Вид краевых условий и матрицы $\frac{\partial \Phi}{\partial p}$ аналогичен соответствующим элементам из предыдущего примера.

Результаты.

Для начального приближения $p_0 = [1.5, 7, 1.5]$ и $\lambda := 2.7721992263175$ таблица результатов представлена ниже.

Таблица 11

Метод	Результат	Кол-во шагов	Приращение параметра
НП	2.0023, 8.4634, 2.0023	19	0.1
П	2.0206, 8.5148, 2.0206	10	0.1
rkf4(5)	2.0228, 8.5661, 2.0228	-	-

Пример 9. *Оптимальное управление. Задача быстрогодействия.*

Постановка задачи.

Пусть по прямой движется по инерции материальная точка. Задача состоит в том, чтобы наискорейшим образом остановить движение этой точки в заданном месте прямой, которое мы примем за начало координат, применением к ней силы ограниченной по модулю [30, 29].

Теоретические сведения.

В общем виде задача нахождения оптимального управления ставится следующим образом. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t) \quad (1.71)$$

с начальным условием $x(t_0) = x_0$.

Кроме неизвестной вектор функции $x(t)$, эта система содержит еще так называемую управляющую функцию (или вектор функцию) $u(t)$. Управляющую функцию надо выбрать так, чтобы заданный функционал

$$L = \int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t)) dt \quad (1.72)$$

достигал экстремума.

Функция $u(t)$, дающая решение поставленной задачи, называется оптимальным управлением.

Эту задачу можно рассматривать как задачу на условный экстремум функционала L с дифференциальными связями (1.71). Однако, в практических задачах оптимальные функции часто лежат на границе множеств допустимых управляющих функций. И теория задач на условный экстремум, предполагавшая возможность двусторонних вариаций, неприменима.

Поэтому для решения задач оптимального управления обычно применяют другие методы.

Рассмотрим один из таких методов - принцип максимума Понтрягина. Введем некоторые обозначения

$$\tilde{x} = (x^0, x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n, \tilde{\psi} = (\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n)$$

Введем функцию

$$K(\tilde{x}, \tilde{\psi}, u) = \psi_\alpha f^\alpha(\tilde{x}, u),$$

где предполагается суммирование по $\alpha = 0, 1, \dots, n$.

Теорема 1.4 [29] *Рассмотрим систему уравнений*

$$\dot{x}^i = \frac{\partial K(\tilde{x}, \tilde{\psi}, u)}{\partial \psi_i}, \quad (1.73)$$

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial K(\tilde{x}, \tilde{\psi}, u)}{\partial x^i}. \quad (1.74)$$

Система уравнений (1.73), (1.74) содержит $2(n + 1)$ уравнений. Она неполна так как наряду с $2(n + 1)$ неизвестными функциями x^i, ψ_i $i = 1, 2, \dots, n$ содержит еще неизвестную точку $u \in \Omega$. Система уравнений (1.73) содержит систему (1.71) управляемого объекта, а так же определение функционала L (см. (1.72)). Оказывается, что для того чтобы управление было оптимальным при заданном функционале L , необходимо, чтобы существовала ненулевая векторная функция $\psi(t)$, удовлетворяющая системе уравнений (1.73), (1.74), и, кроме того, чтобы для любого t из отрезка $t_0 \leq t \leq t_1$, и для любой точки $v \in \Omega$ выполнялось неравенство

$$K(\tilde{x}, \tilde{\psi}, u) \geq K(\tilde{x}, \tilde{\psi}, v). \quad (1.75)$$

Сведение первоначальной задачи к краевой.

Рассматриваемую задачу можно записать в следующем виде

$$\ddot{x} = u, \quad T \rightarrow \min, \quad |u| \leq 1,$$

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}'_0, \quad x(T) = 0, \quad \dot{x}(T) = 0. \quad (1.76)$$

Для данной задачи условие $T \rightarrow \min$ означает, что необходимо искать экстремум следующего функционала

$$L = \int_0^T 1 dt = \int_0^T f^0(x, u) dt \quad (1.77)$$

и, следовательно, $f^0(x, u) \equiv 1$.

В фазовых координатах система (1.76) переписется так

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, & x^1(0) = x_0^1, & x^1(T) = 0, \\ \dot{x}^2 = u, & x^2(0) = \dot{x}'_0, & x^2(T) = 0. \end{cases} \quad (1.78)$$

Составим функцию K

$$K(\tilde{x}, \tilde{\psi}, u) = \psi_0 + \psi_\alpha f^\alpha(x, u), \quad \alpha = 1, 2, \quad (1.79)$$

где $f^1 = x^2$, $f^2 = u$ и $f^0 \equiv 1$. Положим

$$H(x, \psi, u) = \psi_\alpha f^\alpha(x, u), \quad \alpha = 1, 2. \quad (1.80)$$

Функцию K можно выразить через H :

$$K = \psi_0 + H.$$

Условие максимума (1.75) переписывается следующим образом

$$H(x, \psi, v) \leq H(x, \psi, u). \quad (1.81)$$

Понятно, что вместо K достаточно рассматривать H . Приходим к основному результату. Решение системы

$$\begin{aligned} \dot{x}^i &= \frac{\partial H}{\partial \psi_i}, \\ \dot{\psi}_i &= -\frac{\partial H}{\partial x^i} \end{aligned} \quad (1.82)$$

с условием (1.81), граничными условиями из системы (1.76) и ненулевой функцией $\psi(t)$, эквивалентно решению системы (1.76). Функция H для нашей задачи есть

$$H = \psi_1 x^2 + \psi^2 u.$$

Следовательно, условие максимума дает возможность найти u

$$\psi_2 u = \max_u \psi_2 u. \quad (1.83)$$

Из равенства (1.83) получаем

$$u(t) = \text{sign} \psi_2. \quad (1.84)$$

Введем обозначения $x^3 = \psi_1$ и $x^4 = \psi_2$. Тогда задача (1.76) (или (1.82)) запишется как

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2, \\ \dot{x}^2 = \text{sign} x^4, \\ \dot{x}^3 = 0, \\ \dot{x}^4 = -x^3, \\ x^1(0) = x_0^1, x^1(T) = 0, x^2(0) = x_0^2, \\ x^2(T) = 0, (x^3(T))^2 + (x^4(T))^2 = 1. \end{cases} \quad (1.85)$$

Для численного решения системы (1.85) ее необходимо привести к надлежащему виду [38]. Введем неизвестное время остановки $x^5 = T$. Заметим, что не все правые части системы (1.85) являются непрерывными. Это продиктовано видом множества допустимых управлений $U_0 = \{u : |u| \leq 1\}$. Гладкая аппроксимация множества U_0 может выглядеть так: $U_\mu = \{u_1^2/\mu + u_2^2 \leq 1\}$ - чем меньше μ , тем больше множество U_μ похоже на множество U_0 . Используя эти результаты, окончательно получаем

следующую систему (теперь для нумерации переменных использованы нижние индексы)

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_5 \left(x_2 + \frac{\mu x_3}{\sqrt{\mu x_3^2 + x_4^2}} \right), \\ \dot{x}_2 = x_5 \frac{x_4}{\sqrt{\mu x_3^2 + x_4^2}}, \\ \dot{x}_3 = 0, \\ \dot{x}_4 = -x_5 x_3, \\ \dot{x}_5 = 0, \\ x_1(0) = x_{10}, x_1(1) = 0, x_2(0) = x_{20}, \\ x_2(1) = 0, x_3^2(1) + x_4^2(1) = 1. \end{array} \right. \quad (1.86)$$

Численное решение.

Для работы методов простого и наилучшего параметра необходимо нахождение матрицы $\Phi'(p)$. Рассмотрим процесс формирования этой матрицы.

Метод пристрелки требует введения пяти вспомогательных переменных p_1, p_2, \dots, p_5 , которые определяют задачу Коши для уравнений из (1.86), с помощью добавления начальных условий $x_i(0) = p_i$, $i = 1, 2, \dots, 5$. В параметрах p_1, p_2 система не нуждается, так как $x_1(0)$ и $x_2(0)$ определены. Этот результат говорит о том, что $\Phi'(p)$ имеет размерность 3×3 .

Система уравнений $\Phi(p) = 0$ для краевой задачи (1.86):

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(1) = 0, \\ x_2(1) = 0, \\ x_3^2(1) + x_4^2(1) - 1 = 0. \end{array} \right.$$

Следовательно, i -ый столбец матрицы $\Phi'(p)$ имеет вид

$$\frac{\partial \Phi(p)}{\partial p_i} = \begin{pmatrix} X_{1,i}(1) \\ X_{2,i}(1) \\ 2x_3(1)X_{3,i}(1) + 2x_4(1)X_{4,i}(1) \end{pmatrix}, \quad (1.87)$$

где $X_{i,j}(t) = \frac{\partial x_i(t,p)}{\partial p_j}$.

Результаты.

Для начального вектора $p_0 = [-.4, -1.6, 4]$ таблица результатов (табл. 12) представлена ниже.

Метод	Результат	Количество шагов	Приращение параметра
НП	-.4390, -1.7544, 6.0966	28	0.1
НП	-.4428, -1.7706, 6.0501	55	0.05
П	-.4379, -1.7423, 6.0660	20	0.05
rkf4(5)	-.4483, -1.7915, 5.9800	-	-

Пример 10.

Рассмотрим следующую краевую задачу

$$\begin{cases} \ddot{\gamma}(t) = 2[\dot{\gamma}(0)(\dot{\gamma}(0) - 1) - \gamma(0)], \\ \gamma(0) = \alpha, \\ \gamma(1) = 0. \end{cases} \quad (1.88)$$

Решаем задачу *методом пристрелки*. Положим недостающее начальное условие $\dot{\gamma}(0) = p$. Получим начальную задачу

$$\begin{cases} \dot{x} = y, & x(0) = \alpha, \\ \dot{y} = 2[p(p - 1) - \alpha], & y(0) = p, \end{cases} \quad (1.89)$$

решение которой будет решением задачи (1.88), если

$$x(t, p)|_{t=1} = 0. \quad (1.90)$$

Из этого условия определяем параметр p^* , дающий решение задачи.

Построение части кривой $p = p(\mu)$, ведущей от точки p_0 к точке p^* , осуществляется с помощью интегрирования следующей начальной задачи

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\mu} &= - \left[\frac{\partial x(1, p)}{\partial p} \right]^{-1} x(1, p_0), \\ p(\mu)|_{\mu=0} &= p_0. \end{aligned} \quad (1.91)$$

Неизвестную производную $\partial x / \partial p$ найдем из системы

$$\begin{cases} \dot{X} = Y, & X(0) = 0, \\ \dot{Y} = 2[2p - 1], & Y(0) = 1, \end{cases} \quad (1.92)$$

которая получена из уравнений (1.89) дифференцированием по p . Здесь $X = \frac{\partial x}{\partial p}$ и $Y = \frac{\partial y}{\partial p}$. Таким образом, поочередно решая (1.89), (1.92) и (1.91) находим p^* .

Исследуем поведение системы (1.91) на отрезке интегрирования. Точное решение системы (1.89) есть

$$x = \alpha + p(t - t^2) + (p^2 - \alpha)t^2. \quad (1.93)$$

Заметим, что $x(1, p) = p^2$, а p^* решение уравнения $p^2 = 0$. Следовательно система (1.91) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\mu} &= -\frac{p_0^2}{2p}, \\ p(0) &= p_0. \end{aligned} \quad (1.94)$$

Преобразуем к наилучшему параметру систему (1.91)

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\lambda} &= \frac{-p_0}{\sqrt{(2p)^2 + p_0^4}}, \quad p(0) = p_0, \\ \frac{d\mu}{d\lambda} &= \frac{1}{\sqrt{1 + (p_0^2/(2p))^2}}, \quad \mu(0) = 0. \end{aligned} \quad (1.95)$$

Интегрирование системы (1.94) с помощью метода Эйлера порождает процесс

$$\begin{aligned} p_{(k+1)} &= p_{(k)} - \frac{p_0^2}{2p_{(k)}} \Delta\mu, \\ \mu_{(k+1)} &= \mu_{(k)} + \Delta\mu. \end{aligned} \quad (1.96)$$

Интегрирование системы (1.95) порождает процесс

$$\begin{aligned} p_{(k+1)} &= p_{(k)} - \frac{p_0}{\sqrt{(2p_{(k)})^2 + p_0^4}} \Delta\mu, \quad p_{(0)} = p_0, \\ \mu_{(k+1)} &= \mu_{(k)} + \frac{1}{\sqrt{1 + (p_0^2/(2p_{(k)}))^2}} \Delta\mu, \quad \mu_{(0)} = 0. \end{aligned} \quad (1.97)$$

Очевидно, что при подходе к решению $p^* = 0$ правая часть системы (1.96) будет неограничено возрастать, затрудняя решение, в отличие от системы (1.97).

Пример 11.

Соотношение для энергии, которому удовлетворяет распределение температур при детонации твердого взрывчатого вещества в одномерном случае описывается нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением [32]

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2}{t} \frac{d\theta}{dt} + \alpha \exp \frac{\theta}{1 + \theta/\gamma} = 0 \quad (1.98)$$

с граничными условиями

$$\frac{d\theta(0)}{dt} = 0, \quad N_{nu}\theta(1) + \frac{d\theta(1)}{dt} = 0. \quad (1.99)$$

Задача решалась для следующего набора параметров: $\alpha = 1$, $N_{nu} = 5$, $\gamma = -1$.

Таким образом, необходимо решать краевую задачу [25].

Метод стрельбы требует на каждом шаге решения следующей системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = p, \\ \dot{x}_2 = -\frac{2}{t}x_2 - \alpha \exp\left(\frac{x_1}{1+x_1/\gamma}\right), & x_2(0) = 0, \\ \dot{x}_3 = x_4, & x_3(0) = 1, \\ \dot{x}_4 = -\frac{2}{t}x_4 - \alpha \exp\left(\frac{x_1}{1+x_1/\gamma}\right) \frac{x_3}{(1+x_1/\gamma)^2}, & x_4(0) = 0. \end{cases} \quad (1.100)$$

Функция $\Phi(p)$ и ее производная $\Phi'(p)$ имеют вид

$$\Phi(p) = N_{nu}x_1(1, p) + x_2(1, p), \quad (1.101)$$

$$\Phi'(p) = N_{nu}x_3(1, p) + x_4(1, p). \quad (1.102)$$

Необходимо подобрать p из условия $\Phi(p) = 0$. Трудность численного решения задачи заключается в следующем, на первом шаге вычислить правую часть невозможно, т.к. имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$ при вычислении элемента $\frac{2}{t}x_2(t)|_{t=0}$ ($\frac{2}{t}x_4(t)|_{t=0}$). Для преодоления данной трудности изменялся отрезок интегрирования. Было предложено отступать вправо от нуля и проводить вычисления на отрезке $[\varepsilon, 1]$, $\varepsilon > 0$. Другая трудность связана с тем, что правая часть содержит члены вида $\exp\left(\frac{u}{1+u/\gamma}\right)$. Это накладывает ограничения на значения $x_1(t) = \theta(t)$, так как

$$\lim_{u \rightarrow -\gamma+0} \exp\left(\frac{u}{1+u/\gamma}\right) = 0, \quad (1.103)$$

$$\lim_{u \rightarrow -\gamma-0} \exp\left(\frac{u}{1+u/\gamma}\right) = +\infty. \quad (1.104)$$

График правого краевого условия, построенный численно, показан на рис. 1.8.

Видно, что точка пересечения $(p^*, \Phi(p^*))$ кривой с осью абсцисс находится правее нуля. Поэтому, задаваясь приближением

$$x_1(0) = \theta(0) = p_0 > 0 \quad (1.105)$$

приходим к решению задачи. На рис. 1.9 приведен график решения задачи.

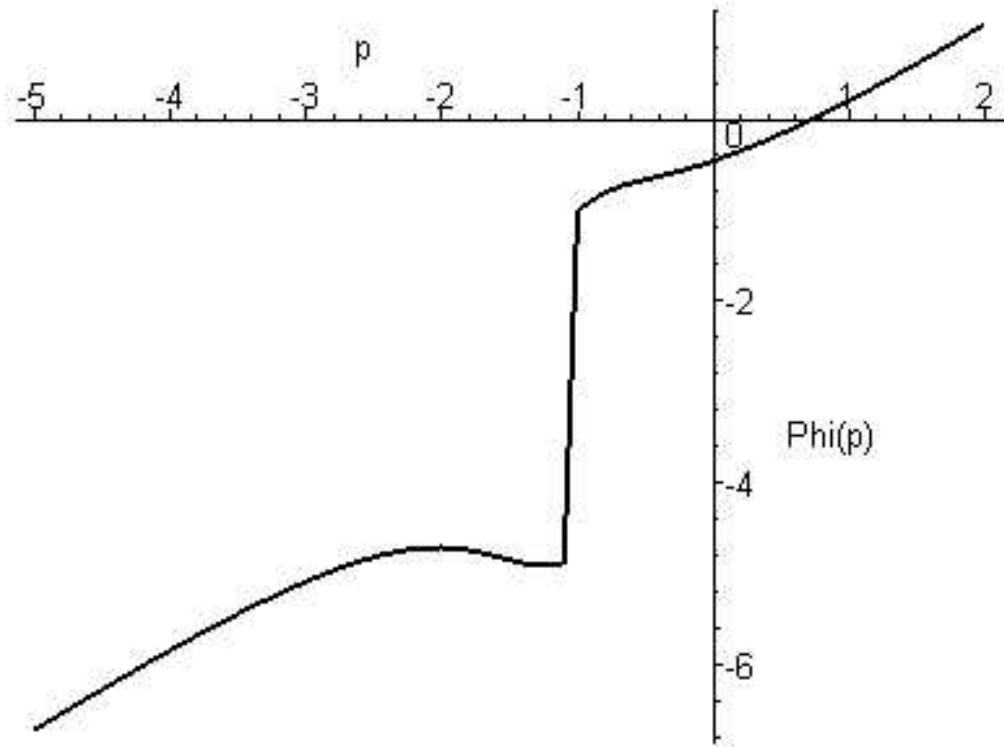


Рис. 1.8.

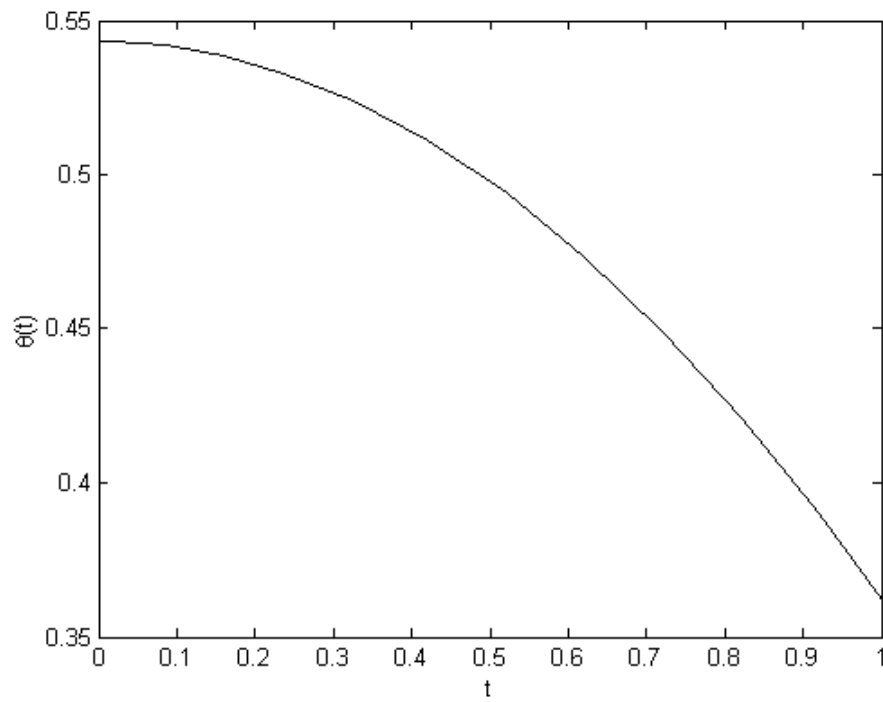


Рис. 1.9.

Пример 12.

Граничная задача, поставленная Вейбелом [53] и Трёшем [52], первоначально была связана с исследованием обжата плазменного шнура давлением излучения. Из-за жестких ограничений ее решение приближенно описывает рассматриваемый физический процесс. Тем не менее, численное решение данной задачи весьма трудоемко, так как для больших значений n решение становится неустойчивым. В безразмерных переменных задача Трёша сводится к решению уравнения

$$d^2y/dt^2 = n \operatorname{sh}(ny)$$

с граничными условиями

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

Таким образом, необходимо решать краевую задачу [26].

Метод стрельбы требует на каждом шаге решения следующей системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = 0, \\ \dot{x}_2 = n \operatorname{sh} nx_1, & x_2(0) = p, \\ \dot{x}_3 = x_4, & x_3(0) = 0, \\ \dot{x}_4 = n^2 x_3 \operatorname{ch} nx_1, & x_4(0) = 1. \end{cases}$$

Функция $\Phi(p)$ и ее производная $\Phi'(p)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi(p) &= x_1(1, p) - 1, \\ \Phi'(p) &= x_3(1, p). \end{aligned}$$

Необходимо подобрать p из условия $\Phi(p) = 0$. Трудность численного решения задачи заключается в следующем, решение неустойчиво и при значении аргумента $t_\infty = (1/n) \ln(8/\dot{y}(0))$ решение задачи имеет полюс. Для преодоления данной трудности для метода пристрелки необходимо выбирать неизвестное начальное приближение, таким образом, чтобы $t_\infty \notin [0, 1]$. Для параметра $n = 10$ были проведены численные расчеты, которые совпали с результатами полученными другими авторами [50]. График решения представлен на рис. 1.10. Непрерывная линия - результаты решения с помощью алгоритма, использующего наилучшую параметризацию, окружности - результаты полученные в работе [50].

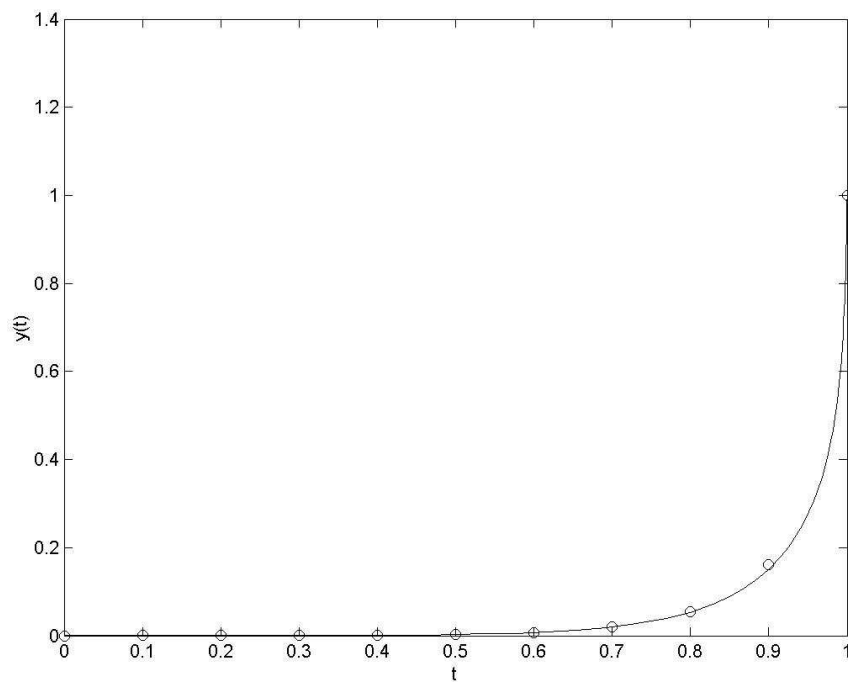


Рис. 1.10.

Глава 2

Параметризация решения в точках бифуркации

2.1. Поведение кривой в точке простой бифуркации

В общем случае кривая может быть задана системой

$$F(x) = 0, \quad (2.1)$$

в предположении, что функция $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $F \in C^3(\mathbb{R}^{n+1})$.

Определение 1. Точка x_0 называется *точкой простой бифуркации* уравнения (2.1), если выполняются следующие условия

- 1) $F(x_0) = 0$,
- 2) $\text{rank } F'(x_0) = n - 1$,
- 3) гессиан функции $v(\alpha_1, \alpha_2) = w^T F(x_0 + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2)$ в начале координат имеет одно положительное и одно отрицательное собственное значение.

Здесь a_1, a_2 линейно независимые векторы принадлежащие $N(F'(x_0))$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $w \in N([F'(x_0)]^T)$, где $N(\cdot)$ – пространство нулей соответствующего оператора.

В точке x_0 выполняется второе условие, следовательно размерность пространства нулей оператора $F'(x_0)$ будет равна двум:

$$\dim N(F'(x_0)) = 2.$$

Пусть векторы a_1, a_2 – образуют базис в этом пространстве. Ортонормируем и транспонируем линейно независимые строки матрицы $F'(x_0)$. Для полученных векторов введем обозначения p_1, p_2, \dots, p_{n-1} . Очевидно, что любой вектор x можно представить в виде

$$x = x_0 + \rho_1 p_1 + \dots + \rho_{n-1} p_{n-1} + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2. \quad (2.2)$$

Рассмотрим функции F_{i_k} , ($i_k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $k = \overline{1, n-1}$) компоненты градиентов которых образуют в точке x_0 линейно независимые строки матрицы $F'(x_0)$. Введем для функций F_{i_k} обозначения

$$F_{i_k} = U_k(x), \quad k = \overline{1, n-1}.$$

Пусть найден ненулевой вектор w такой, что

$$w^T F'(x_0) = 0^T. \quad (2.3)$$

Существование ненулевого вектора w эквивалентно линейной зависимости строк матрицы $F'(x_0)$.

Определим функцию V следующим образом

$$V = w^T F. \quad (2.4)$$

Из определения этой функции и из равенства (2.3) следует, что

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}(x_0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n+1. \quad (2.5)$$

Введем систему уравнений

$$\begin{aligned} U_k(x) &= 0, \quad k = \overline{1, n-1}, \\ V(x) &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Лемма 2.1 *Нахождение решения системы (2.1) эквивалентно нахождению решения системы (2.6).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Система (2.6) состоит из компонент вектор-функции (2.1) или их линейной комбинации. Поэтому всякое решение (2.1) будет решением (2.6).

С другой стороны в систему (2.6) без изменений входит $n-1$ уравнение системы (2.1), т.е. U_k ($k = \overline{1, n-1}$). Кроме того, функция V получается как некоторая линейная комбинация функций системы (2.1). Если в равенстве (2.4) коэффициент при функции F_m системы (2.1), которая не входит в U_k ($k = \overline{1, n-1}$), был бы равен нулю, то после дифференцирования

V в точке x_0 оказалось бы, что градиенты U_k образуют строки матрицы Якоби, которые линейно зависимы. Это противоречит алгоритму построения функций U_k ($k = \overline{1, n-1}$). Для определенности будем считать, что этот коэффициент равен единице. Пусть x решение (2.6), следовательно $U_k(x) \equiv 0$ ($k = \overline{1, n-1}$) и $V(x) = \alpha_1 U_1(x) + \dots + \alpha_{n-1} U_{n-1}(x) + F_m(x) \equiv 0$. Отсюда следует, что все функции системы (2.1) равны нулю в точке x . \square

Лемма 2.2 (Морса) *Если $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ – функция класса $C^3(G; \mathbb{R})$, определенная на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^m$, а x_0 – особая точка этой функции, в которой гессиан отличен от нуля, то найдется такой диффеоморфизм $g : Z \rightarrow X$ некоторой окрестности начала координат пространства \mathbb{R}^m на окрестность X точки x_0 , что для всех точек $z \in Z$ справедливо равенство*

$$(f \circ g)(z) = f(x_0) - [(z_1)^2 + \dots + (z_k)^2] + [(z_{k+1})^2 + \dots + (z_m)^2]. \quad (2.7)$$

Здесь $f \circ g$ – обозначает композицию двух функций.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см. [13]. \square

Замечание 1. Количество отрицательных и положительных слагаемых в (2.7) совпадает с количеством отрицательных и положительных собственных значений матрицы Гессе функции f .

Теорема 2.1 (Крандалла-Рабиновича [40]) *Пусть x_0 точка простой бифуркации уравнения (2.1), тогда в некоторой окрестности x_0 множество решений уравнения (2.1) описывается двумя гладкими кривыми, которые пересекаются в точке x_0 под ненулевым углом.*

Приведем доказательство, отличное от полученного в [40].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся разложением (2.2) и перейдем в уравнениях (2.6) к новым переменным

$$U(\rho, \alpha) = 0, \quad V(\rho, \alpha) = 0. \quad (2.8)$$

Здесь $(\rho, \alpha) = (\rho_1, \dots, \rho_{n-1}, \alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Заметим, что определитель $U'_\rho(0)$ отличен от нуля. Следовательно по теореме о неявной функции в некоторой окрестности нуля определена однозначная функция $\rho = \rho(\alpha)$. Подставляя ее в последнее уравнение системы (2.8), получаем

$$V(\alpha) = V(\rho(\alpha), \alpha) = 0. \quad (2.9)$$

Таким образом, нахождение решения в окрестности точки простой бифуркации x_0 уравнения (2.1) свелось к нахождению решения уравнения

(2.9) в окрестности нуля. Из способа построения функции $V(\alpha)$ и из того факта, что x_0 точка простой бифуркации следует, что $V(0) = 0$, $V'(0) = 0$ и, в силу третьего требования к точке простой бифуркации, гессиан имеет одно положительное и одно отрицательное собственное значение. Кроме того, гессиан в начале координат отличен от нуля. Поэтому из леммы Морса следует, что найдется диффеоморфизм g , такой что в некоторой окрестности начала координат будет справедливо представление

$$(V \circ g)(z) = z_1^2 - z_2^2.$$

Так как g диффеоморфизм, то в плоскости (α_1, α_2) получаем две гладкие, пересекающиеся под ненулевым углом, кривые. Переменные x линейно зависят от (ρ, α) , где $\rho = \rho(\alpha)$ гладкие функции. Таким образом, приходим к утверждению теоремы. \square

Замечание 2. Уравнение (2.9) называется уравнением разветвления Ляпунова-Шмидта [4, 43]. Переход от изучения первоначальной задачи к изучению уравнения разветвления называется редукцией Ляпунова-Шмидта [43].

Следствие 2.1 *В точке простой бифуркации x_0 справедливы следующие соотношения*

$$\dot{\rho}_i(0) = 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (2.10)$$

$$a_1^T V_0'' a_1 \dot{\alpha}_1^2(0) + 2a_1^T V_0'' a_2 \dot{\alpha}_1(0) \dot{\alpha}_2(0) + a_2^T V_0'' a_2 \dot{\alpha}_2^2(0) = 0. \quad (2.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Примем разложение (2.2) в окрестности x_0 . Пусть ρ_i и α_j являются функциями некоторого параметра λ . Справедливо равенство

$$F'(x_0) \dot{x}(\lambda)|_{\lambda=0} = 0, \quad (\cdot = \frac{d}{d\lambda})$$

которое эквивалентно равенству $U'(x_0) \dot{x}(\lambda)|_{\lambda=0} = 0$.

Учитывая разложение (2.2), его можно записать в следующем виде

$$U'(x_0)(P\dot{\rho}(0) + A\dot{\alpha}(0)) = 0. \quad (2.12)$$

Здесь столбцы матрицы P образованы из векторов p_i ($i = \overline{1, n-1}$), столбцы матрицы A – из векторов a_i ($i = 1, 2$), $\dot{\rho}(0)$ – вектор-столбец составленный из коэффициентов $\dot{\rho}_i(0)$ ($i = \overline{1, n-1}$), $\dot{\alpha}(0)$ – вектор-столбец составленный из коэффициентов $\dot{\alpha}_i(0)$ ($i = 1, 2$). Пусть невырожденная квадратная матрица Ω^{-1} при умножении слева на матрицу U' ортонормирует ее строки. Тогда умножая левую и правую часть уравнения (2.12) на матрицу Ω^{-1} получаем

$$P^T P \dot{\rho}(0) + P^T A \dot{\alpha}(0) = 0.$$

Здесь мы воспользовались соотношением

$$\Omega^{-1}U'(x_0) = P^T, \quad (2.13)$$

которое следует из определения векторов p_i ($i = \overline{1, n-1}$). Векторы p_i ($i = \overline{1, n-1}$) – ортонормированны и образуют пространство ортогональное векторам a_i ($i = 1, 2$), поэтому

$$P^T A = 0 \quad (2.14)$$

и получаем, что $\dot{\rho}_i(0) = 0$, $i = \overline{1, n-1}$.

Разложим функцию $V(\alpha)$ в начале координат по формуле Тейлора

$$V(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{2}(V_{,11}^0(\alpha_1)^2 + 2V_{,12}^0(\alpha_1\alpha_2) + V_{,22}^0(\alpha_2)^2) + o(\|\alpha\|^2). \quad (2.15)$$

Здесь $V_{,ij}^0 = \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}(x_0)$. Примем в начале координат разложение

$$\alpha(\lambda) = \dot{\alpha}(0)\lambda + o(\lambda). \quad (2.16)$$

Подставляя разложение (2.16) в (2.15) и учитывая, что на решениях (2.1) $V(\alpha) \equiv 0$, получаем

$$\frac{1}{2}(V_{,11}^0(\dot{\alpha}_1(0))^2 + 2V_{,12}^0(\dot{\alpha}_1(0))(\dot{\alpha}_2(0)) + V_{,22}^0(\dot{\alpha}_2(0))^2)\lambda^2 + o(\lambda^2) = 0. \quad (2.17)$$

Если последнее уравнение разделить на λ^2 и перейти к пределу при $\lambda \rightarrow 0$, то получаем равенство (2.11). \square

2.3. Реализация алгоритма продолжения в точке простой бифуркации

Пусть система уравнений (2.1) задает достаточно гладкую кривую. Предположим, что эта кривая содержит особые точки, в которых ранг матрицы Якоби равен $n-1$, т.е. $\text{rank } J_0 = n-1$. Этот случай сводится к ветвлению плоской кривой.

Поэтому алгоритм нахождения всех ветвей состоит из трех шагов:

- 1) нахождение плоскости в которой происходит ветвление,
- 2) построение окружности с центром в особой точке, лежащей в плоскости ветвления,

3) поиск точек пересечения кривой с данной окружностью.

1. Нахождение плоскости в которой происходит ветвление.

Данная задача эквивалентна нахождению векторов a_1, a_2 , на которые натянута плоскость $\Pi(a_1, a_2, x_0)$, содержащая точку x_0 . Эти векторы можно найти из условия

$$J_0 a_k = 0, \quad k = 1, 2. \quad (2.18)$$

Здесь $J_0 = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right) (x_0)$ – матрица Якоби ($i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n+1}$), x_0 – особая точка. Решить (2.18) можно следующим образом [15]. Дополним J_0 нулевой строкой, и обозначим получившуюся квадратную матрицу символом A . Воспользуемся разложением

$$A^T = QR, \quad (2.19)$$

где Q – ортогональная матрица, R – верхняя треугольная матрица. Поэтому R имеет вид:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ O \end{pmatrix}.$$

Здесь R_1 – матрица размерности $(n-1) \times (n+1)$, O – нулевая матрица размерности $2 \times (n+1)$. Используя соотношение (2.19) и равенство $Q^{-1} = Q^T$, получаем

$$AQ = (AQ_1 | AQ_2) = R^T = (R_1^T | O^T).$$

Здесь мы учли, что матрицу Q можно представить как объединение двух блочных матриц: Q_1 размерности $(n+1) \times (n-1)$ и Q_2 размерности $(n+1) \times 2$. Вертикальная черта внутри скобок разделяет блоки матрицы. Матрица Q_2 содержит последние два столбца матрицы Q , которые и являются ортонормированными векторами a_1, a_2 .

2. Построение окружности с центром в особой точке.

Предполагаем, что векторы a_1, a_2 ортонормированы. Множество точек, образующих в плоскости $\Pi(a_1, a_2, x_0)$ окружность радиуса ε с центром в точке x_0 , может быть задано равенством

$$x = x_0 + \varepsilon(a_1 \cos \varphi + a_2 \sin \varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

3. Предиктор для точек пересечения кривой с окружностью.

В ряде случаев, если известны вторые производные, можно достаточно точно дать прогноз местоположения точек пересечения кривой и окружности, или сделать заключение о характере ветвления. Пусть найден ненулевой вектор w такой, что $w^T J_0 = 0^T$. Существование вектора w эквивалентно линейной зависимости строк J_0 .

Определим функцию V соотношением (2.4). Из определения функции следует, что должны выполняться равенства (2.5).

Информацию о ветвлении можно получить исходя из уравнений типа (2.11)

$$V_{,11}^0(\alpha'_1)^2 + 2V_{,12}^0(\alpha'_1)(\alpha'_2) + V_{,22}^0(\alpha'_2)^2 = 0, \quad D = V_{,11}^0 V_{,22}^0 - (V_{,12}^0)^2. \quad (2.20)$$

Так как имеет место разложение (2.2), то

$$V_{,ij}^0 = \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}(x_0) = a_i^T H(x_0) a_j \quad (i, j = 1, 2), \quad (2.21)$$

где $H(x_0)$ – матрица Гессе (матрица вторых производных) функции V в точке x_0 .

Возможны следующие ситуации

- 1) $D > 0$. В этом случае x_0 изолированная особая точка. Для продолжения решения этот случай интереса не представляет.
- 2) $D < 0$. Пусть $V_{,22}^0 \neq 0$, тогда угол φ касательной к кривой можно определить, решив квадратное уравнение

$$V_{,11}^0 + 2V_{,12}^0 \operatorname{tg} \varphi + V_{,22}^0 (\operatorname{tg} \varphi)^2 = 0. \quad (2.22)$$

Иными словами, в особой точке пересекаются две ветви множества решений системы (2.1) и вдоль каждой ветви решение может быть продолжено.

- 3) $D = 0$ – уравнение (2.22) имеет кратный корень. Здесь особая точка может оказаться точкой соприкосновения двух ветвей решения или точкой возврата. Необходим более тонкий анализ.

2.4. Продолжение решения в точке простого возврата

Пусть функция $F(x)$ аналитична в точке x_0 .

Определение 2. Точку x_0 назовем точкой простого возврата (острия) уравнения (2.1), если выполняются следующие условия:

- 1) $F(x_0) = 0$.
- 2) $\text{rank}F'(x_0) = n - 1$.
- 3) Уравнение разветвления $V(\alpha_1, \alpha_2) = 0$ с точностью до невырожденной линейной замены переменных имеет вид

$$V(\alpha_1, \alpha_2) = L\alpha_1^2 + \sum_{k+s \geq 3} M_{k,s} \alpha_1^k \alpha_2^s = 0, \quad (2.23)$$

где $L, M_{k,s} \in \mathbb{R}$, $L \cdot M_{0,3} \neq 0$.

Замечание 3. В точке возврата две гладкие кривые заканчиваются так, что их касательные совпадают [35].

Теорема 2.1 Точка x_0 является точкой простого возврата уравнения (2.1) тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия

- 1) $F(x_0) = 0$.
- 2) $\text{rank}F'(x_0) = n - 1$.
- 3) Матрица Гессе функции $V(\alpha)$ имеет одно ненулевое собственное значение $2L$.
- 4) Справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{n-1} V''_{\rho_i \tilde{\alpha}_2}(0) R_i^{22} + \frac{1}{3!} V'''_{\tilde{\alpha}_2^3}(0) = M_{0,3} \neq 0. \quad (2.24)$$

Здесь коэффициенты R_i^{22} определены разложением ρ_i в нуле

$$\rho_i = R_i^{11} \tilde{\alpha}_1^2 + 2R_i^{12} \tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2 + R_i^{22} \tilde{\alpha}_2^2 + o(\tilde{\alpha}_1^k \tilde{\alpha}_2^s), \quad k + s = 2; \quad (2.25)$$

$$\alpha = H\tilde{\alpha}, \quad (2.26)$$

где H – матрица, столбцы которой есть ортонормированные собственные векторы матрицы Гессе функции $V(\alpha)$. Кроме того, в первом столбце находится собственный вектор, соответствующий ненулевому собственному значению $2L$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Достаточность. В разложении ρ_i по степеням α отсутствуют линейные члены, поэтому возможное разложение принимает вид (2.25). Обозначим функцию $V(\rho(H\tilde{\alpha}), H\tilde{\alpha})$ как $V(\rho(\tilde{\alpha}), \tilde{\alpha})$. Разложим ее в ряд по переменным $\tilde{\alpha}$

$$\begin{aligned} V(\rho(\tilde{\alpha}), \tilde{\alpha}) = & L\tilde{\alpha}_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (V''_{\rho_i\tilde{\alpha}_2}(0)\rho_i\tilde{\alpha}_2 + V''_{\rho_i\tilde{\alpha}_1}(0)\rho_i\tilde{\alpha}_1) + \\ & + \frac{1}{3!}V'''_{\tilde{\alpha}_1^3}(0)\tilde{\alpha}_1^3 + \frac{1}{3!}V'''_{\tilde{\alpha}_2^3}(0)\tilde{\alpha}_2^3 + \\ & + \frac{1}{2}V'''_{\tilde{\alpha}_1^2\tilde{\alpha}_2}(0)\tilde{\alpha}_1^2\tilde{\alpha}_2 + \frac{1}{2}V'''_{\tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_2^2}(0)\tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_2^2 + o(\tilde{\alpha}_1^k\tilde{\alpha}_2^s), \quad k + s = 3. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Подставим разложение (2.25) в (2.27) и соберем коэффициенты при одинаковых членах $\tilde{\alpha}_1^k\tilde{\alpha}_2^m$

$$\begin{aligned} V(\rho(\tilde{\alpha}), \tilde{\alpha}) = & L\tilde{\alpha}_1^2 + \left(\sum_{i=1}^{n-1} V''_{\rho_i\tilde{\alpha}_1}(0)R_i^{11} + \frac{1}{3!}V'''_{\tilde{\alpha}_1^3}(0) \right) \tilde{\alpha}_1^3 + \\ & \left(\sum_{i=1}^{n-1} (V''_{\rho_i\tilde{\alpha}_2}(0)R_i^{11} + 2V''_{\rho_i\tilde{\alpha}_1}(0)R_i^{12}) + \frac{1}{2}V'''_{\tilde{\alpha}_1^2\tilde{\alpha}_2}(0) \right) \tilde{\alpha}_1^2\tilde{\alpha}_2 + \\ & \left(\sum_{i=1}^{n-1} (2V''_{\rho_i\tilde{\alpha}_2}(0)R_i^{12} + V''_{\rho_i\tilde{\alpha}_1}(0)R_i^{22}) + \frac{1}{2}V'''_{\tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_2^2}(0) \right) \tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_2^2 + \\ & \left(\sum_{i=1}^{n-1} V''_{\rho_i\tilde{\alpha}_2}(0)R_i^{22} + \frac{1}{3!}V'''_{\tilde{\alpha}_2^3}(0) \right) \tilde{\alpha}_2^3 + o(\tilde{\alpha}_1^k\tilde{\alpha}_2^s), \quad k + s = 3. \end{aligned}$$

Нам необходимо получить разложение вида (2.23). Поэтому коэффициент $M_{0,3}$ при члене $\tilde{\alpha}_2^3$ должен быть отличен от нуля.

Необходимость. Первые два условия определения точки простого возврата совпадают с первыми двумя условиями теоремы. Из третьего же условия определения и соотношений (2.23) сразу следуют третье и четвертое условия теоремы. \square

Характерное свойство острия или точки возврата – нарушение гладкости кривой, параметризованной параметром, выражающим длину дуги. Поэтому стандартные алгоритмы, основанные на вариантах метода Ньютона, с большой вероятностью будут расходиться. Интересно, что те же методы, без модификаций, почти всегда сходятся в случае простой точки бифуркации (т. е. точки, в которой не вырождена матрица Гессе). Это связано с существованием конуса сходимости для метода Ньютона с центром в точке простой бифуркации [45]. В случае точки возврата это не

так. В статье [51] представлен аналитический метод построения асимптотик решения в том числе и в окрестности точки возврата, основанный на продолжении решения вдоль касательного вектора.

Рассмотрим алгоритм прохождения точки простого возврата.

1. Идентификация.

Для нахождения точки возврата необходима априорная тестовая функция. Априорность тестовой функции понимается как возможность идентификации особой точки до её прохождения. Поэтому тестовая функция, основывающаяся на изменении знака якобина (см. [45],[37]), непригодна.

2. Прохождение.

Производя редукцию Ляпунова-Шмидта и замену переменных мы приходим к уравнению (2.23), записанному относительно новых переменных $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2$.

С точностью до бесконечно малых высших порядков решение этого уравнения можно заменить решением уравнения [4]

$$L\tilde{\alpha}_1^2 + M_{0,3}\tilde{\alpha}_2^3 = 0.$$

Очевидно, что наличие острия не позволяет применять стандартные алгоритмы нахождения решения параметризованного длиной дуги.

Расширим пространство переменных, введя новую переменную μ , с помощью уравнения

$$\tilde{\alpha}_2 + \text{sign}(L/M_{0,3})\mu^2 = 0,$$

тогда получаем систему уравнений

$$L\tilde{\alpha}_1^2 + M_{0,3}\tilde{\alpha}_2^3 = 0, \quad \tilde{\alpha}_2 + \text{sign}(L/M_{0,3})\mu^2 = 0.$$

Теперь мы имеем дифференцируемую по длине дуги кривую в пространстве трех переменных $(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \mu)$. Таким образом, появляется возможность проходить эту кривую с помощью обычных алгоритмов продолжения.

На практике прохождение кривой осуществляется следующим образом.

Находим разложение (2.2).

Находим матрицу $H = (h_{ij})$, столбцы которой состоят из ортонормированных собственных векторов матрицы Гессе функции $V(\alpha)$. В первом столбце находится собственный вектор, соответствующий собственному значению $2L \neq 0$.

Находим матрицу перехода $T = (t_i^j)$

$$p_i = \sum_{j=1}^{n+1} t_i^j e_j, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad a_k = \sum_{j=1}^{n+1} t_{n-1+k}^j e_j \quad k = 1, 2.$$

Здесь e_j ($j = 1, 2, \dots, n+1$) – канонический базис в пространстве \mathbb{R}^{n+1} . Переход между координатами осуществляется по правилу

$$(\rho, \alpha_1, \alpha_2) = (x - x_0)T^{-1}.$$

Учитывая, что

$$\tilde{\alpha}_2 + \text{sign}(L/M_{0,3})\mu^2 = 0, \quad \tilde{\alpha}_2 = h_{12}\alpha_1 + h_{22}\alpha_2,$$

получаем

$$h_{12}[(x - x_0)T^{-1}]_n + h_{22}[(x - x_0)T^{-1}]_{n+1} + \text{sign}(L/M_{0,3})\mu^2 = 0. \quad (2.28)$$

Здесь $[\cdot]_i$ обозначает взятие i -ой компоненты вектора. Добавляя уравнение (2.28) к системе (2.1), получаем возможность проходить точку простого возврата с помощью стандартных алгоритмов, например, метода Ньютона.

2.5. Дискретное продолжение решения в особой точке вдоль гладкой кривой

Покажем, что особую точку x_0 , на дифференцируемой по длине дуги кривой множества решений системы (2.1), можно преодолеть с помощью метода Ньютона.

Схема решения системы уравнений (2.1) при помощи метода Ньютона примет вид [23]

$$\begin{cases} x_{(k)}^{(i+1)} = x_{(k)}^{(i)} - \left[\frac{\partial \Psi_k}{\partial x}(x_{(k)}^{(i)}) \right]^{-1} \Psi_k(x_{(k)}^{(i)}), & i = 1, \dots, r_k - 1 \\ x_{(k)}^{(0)} = 2x_{(k-1)}^{(r_{k-1})} - x_{(k-2)}^{(r_{k-2})}. \end{cases}$$

Здесь

$$\Psi_{k+1}(x) = \begin{cases} F(x) = 0, \\ \|x - x_k^{(r_k)}\|^2 - \Delta\lambda^2 = 0, \end{cases}$$

где $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\lambda_{k+1} = \lambda_k + \Delta\lambda$.

Рассмотрим некоторую окрестность точки простой бифуркации или точки простого возврата. Пусть $x = x(\lambda)$ описывает одну ветвь кривой, заданной уравнением (2.1), в случае точки простой бифуркации. В случае же точки простого возврата пусть кривая будет решением уравнения (2.1) и "регуляризирующего" уравнения (2.28). Обозначим точку бифуркации как $x_0 = x(\lambda_0)$.

Теорема 2.1 *В некоторой окрестности точки простой бифуркации или точки простого возврата справедлива следующая оценка*

$$\| [J(x(\lambda))]^{-1} \| < m / |\lambda - \lambda_0|^k.$$

Здесь значение $k = 1$ соответствует точке простой бифуркации, а $k = 3$ – точке простого возврата, $m \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для упрощения выводов примем $\lambda_0 = 0$.

1. Пусть x_0 – точка простой бифуркации, и процесс продолжения описывается следующими уравнениями

$$\begin{aligned} U(x(\lambda)) &= 0, \\ V(x(\lambda)) &= 0, \\ x'(\lambda)(x(\lambda) - x(\lambda_{n-1})) &= \Delta\lambda. \end{aligned}$$

Тогда матрица Якоби имеет вид

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} U'_x(x(\lambda)) \\ V'_x(x(\lambda)) \\ x'(\lambda)^T \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Обозначим касательные векторы различных ветвей кривой в точке простой бифуркации x_0 через v_1 и v_2 . Для определенности будем считать, что мы идем по той ветви кривой, которой соответствует касательный вектор v_1 . В точке x_0 справедливо следующее разложение $V'_x(\lambda) = v_1^T H \lambda + O(\lambda^2)$, где H – матрица Гессе, вычисленная в точке x_0 . Тогда в этой точке матрицу (2.29) можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} \Omega P^T + O(\lambda) \\ v_1^T H \lambda + O(\lambda^2) \\ v_1^T + O(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Умножая эту матрицу справа на матрицу

$$\begin{pmatrix} P & v_2 & v_1 \end{pmatrix},$$

якобиан которой отличен от нуля, получаем матрицу

$$K = \begin{pmatrix} \Omega P^T P + O(\lambda) & \Omega P^T v_2 + O(\lambda) & \Omega P^T v_1 + O(\lambda) \\ v^T H P \lambda + O(\lambda^2) & v_1^T H v_2 \lambda + O(\lambda^2) & v_1^T H v_1 \lambda + O(\lambda^2) \\ v_1^T P + O(\lambda) & v_1^T v_2 + O(\lambda) & v_1^T v_1 + O(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Справедливы следующие соотношения $P^T P = E$, $\det \Omega \neq 0$, которые следуют из равенства (2.13). Векторы v_1 и v_2 являются линейной комбинацией векторов a_1 и a_2 , поэтому, учитывая равенство (2.14), получаем следующие соотношения $P^T v_1 = 0$, $P^T v_2 = 0$. Без ограничения общности можем считать, что касательный вектор v_1 имеет единичную норму $v_1^T v_1 = 1$. Так как v_1 и v_2 являются единственными, с точностью до умножения на константу, линейно независимыми решениями уравнения $v_i^T H v_i = 0$, $i = 1, 2$, то справедливы соотношения $v_1^T H v_1 = 0$ и $v_1^T H v_2 \neq 0$. Действительно, если бы $v_1^T H v_2 = 0$, тогда и $v_2^T H v_1 = 0$ и, как следствие, $(v_1 + v_2)^T H (v_1 + v_2) = 0$, однако, последнее равенство противоречит единственности решений.

Следовательно, матрица K упрощается:

$$K = \begin{pmatrix} \Omega E + O(\lambda) & O(\lambda) & O(\lambda) \\ v^T H P \lambda + O(\lambda^2) & v_1^T H v_2 \lambda + O(\lambda^2) & O(\lambda^2) \\ v_1^T P + O(\lambda) & v_1^T v_2 + O(\lambda) & 1 + O(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, определитель $\det K = m_1 \lambda + O(\lambda^2)$ и, следовательно, $\det J = m_2 \lambda + O(\lambda^2)$. Здесь $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$. Отсюда легко получить оценку для нормы матрицы, обратной к матрице Якоби: $\|J^{-1}(\lambda)\| < m/|\lambda|$.

2. Рассмотрим точку простого возврата. Пусть процесс продолжения описывается следующими уравнениями

$$\begin{aligned} U(\rho, \alpha) &= 0, \\ V(\rho, \alpha) &= 0, \\ \alpha_2 - \mu^2 &= 0, \\ \rho'(\lambda)(\rho(\lambda) - \rho(\lambda_{j-1})) + \alpha'(\lambda)(\alpha(\lambda) - \alpha(\lambda_{j-1})) + \mu'(\lambda)(\mu - \mu_{j-1}) &= \Delta\lambda. \end{aligned}$$

Здесь индекс $j - 1$ обозначает параметры, найденные в предыдущей точке кривой.

В окрестности точки простого возврата матрица Якоби этой системы будет иметь вид

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} U'_\rho & U'_{\alpha_1} & U'_{\alpha_2} & 0 \\ V'_\rho & V'_{\alpha_1} & V'_{\alpha_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2\mu \\ \rho'(\lambda) & \alpha'_1(\lambda) & \alpha'_2(\lambda) & \mu'(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

Учитывая смысл переменной λ можно записать равенство $(\rho'(\lambda), \rho'(\lambda)) + \alpha_1'(\lambda)^2 + \alpha_2'(\lambda)^2 + \mu'(\lambda)^2 = 1$. В силу уравнений (2.10), получаем $\rho'(\lambda) = O(\lambda)$. В точке простого возврата справедливо разложение (2.23) и $\alpha_2 = \mu^2$, следовательно $\alpha_1 = \mu^3 + O(\mu^4)$. Поэтому справедливо равенство

$$O(\lambda^2) + ((3\mu^2)^2 + O(\mu^5) + (2\mu)^2 + 1)\mu'(\lambda)^2 = 1. \quad (2.31)$$

Так как в точке простого возврата $\lambda = 0$, $\mu = 0$, то переходя в выражении (2.31) к пределу при $\lambda \rightarrow 0$, получаем, что в окрестности точки бифуркации, с точностью до знака, справедливо равенство $\mu = \lambda + O(\lambda^2)$. Найдем асимптотику для $U'_{\alpha_1}(\lambda)$:

$$U'_{\alpha_1}(\lambda) = U''_{\alpha_1\rho}(0)\rho'(0)\lambda + U''_{\alpha_1\alpha_1}\alpha_1'(0)\lambda + U''_{\alpha_1\alpha_2}\alpha_2'(0)\lambda + O(\lambda^2),$$

так как $\rho'(0) = 0$, $\alpha_1'(0) = 0$, $\alpha_2'(0) = 0$, получаем $U'_{\alpha_1}(\lambda) = O(\lambda^2)$. Аналогично можно показать, что $V'_\rho = O(\lambda^2)$ и $U'_{\alpha_1}(\lambda) = O(\lambda^2)$. Кроме того, $V'_{\alpha_1} = 2\alpha_1(\mu) + O(\mu^4)$, $V'_{\alpha_2} = 3\alpha_2^2(\mu) + O(\mu^5)$.

Учитывая, что $U'_\rho = \Omega P^T P + O(\lambda)$, получаем выражение для матрицы (2.30)

$$J = \begin{pmatrix} \Omega P^T P + O(\lambda) & O(\lambda^2) & O(\lambda^2) & 0 \\ O(\lambda^2) & 2\alpha_1(\mu) + O(\mu^4) & 3\alpha_2^2(\mu) + O(\mu^5) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2\mu \\ O(\lambda) & O(\lambda) & O(\lambda) & 1 + O(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\det J = m_3 2\alpha_1(\mu) + O(\mu^4) = m_3 2\mu^3 + O(\mu^4)$, где $m_3 \in \mathbb{R}$. И в некоторой окрестности точки простого возврата имеем следующую оценку $\|J^{-1}\| < m/|\lambda|^3$. \square

Покажем, что имеет место следующее утверждение о сходимости метода Ньютона в окрестности особой точки x^*

Теорема 2.2 Пусть выполняются следующие условия

- 1) $\|x_k^{(0)} - x_{k-1}\| > \|x^* - x_{k-1}\|$,
- 2) $\|x_k^{(0)} - x^*\| > \frac{2}{3}\Delta\lambda$,
- 3) $\|[\Psi'_i(x)]^{-1}\| < m = \max\{m_1, m_2/\|x - x^*\|^k\}$, где $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$, $k = 1, 3$,
- 4) $\Psi'_i(x)$ ограничена по Липшицу с константой l ,
- 5) кривая $x = x(\lambda)$ является гладкой в окрестности особой точки x^* ,

$$6) \forall k > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists i > 0: \|\Psi_i(x_k^{(i)})\| < \varepsilon.$$

Тогда последовательные итерации метода Ньютона сходятся к решению и радиус сходимости $r' < \frac{\Delta\lambda}{2}$, т.е. метод Ньютона сходится к решению $x_k : x_{k-1} < x^* < x_k$ минуя особую точку (см. рис. 1).

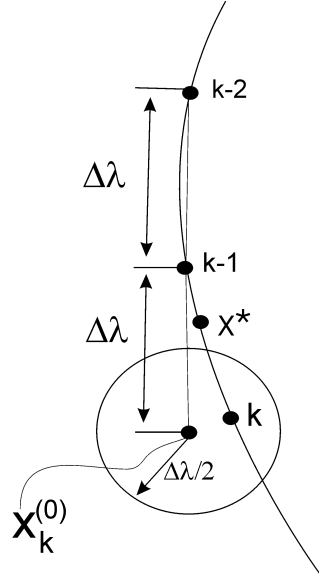


Рис. 2.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для сходимости метода Ньютона достаточно чтобы $q = \frac{1}{2}m^2l\eta < 1$, где η – норма функции. Отсюда следует, что $\eta < \frac{2}{m^2l}$.

Выберем исходя из этого неравенства величину шага $\Delta\lambda$, которая обеспечивает сходимость метода Ньютона [16]

$$\eta = \|F(x_{k-1} + \Delta\lambda e_k)\| = \|F(x_{k-1}) + \int_0^1 F'(x_{k-1} + \theta(\Delta\lambda e_k))d\theta\Delta\lambda e\|$$

$$< \varepsilon + \gamma\Delta\lambda;$$

$$e_k = \frac{x_k^{(r_k)} - x_{k-1}^{(r_{k-1})}}{\|x_k^{(r_k)} - x_{k-1}^{(r_{k-1})}\|}.$$

Следовательно, выбор величины шага из условия

$$\Delta\lambda < \frac{2 - m^2l\varepsilon}{m^2l\gamma}$$

обеспечивает сходимость.

Для метода Ньютона гарантируется сходимость в замкнутом шаре $\overline{S_{r'}(x_0)}$ радиуса r' с центром в точке x_0 . Покажем, что найдется шаг $\Delta\lambda$ при котором выполняется неравенство

$$r' < \frac{\Delta\lambda}{2}. \quad (2.32)$$

Для r' справедлива оценка сверху

$$r' = m\eta \sum_{k=0}^{+\infty} q^{2^k-1} < m\eta \frac{1}{1-q}. \quad (2.33)$$

Учитывая, что выполняются следующие разложения

$$x_k^{(0)} = x_{k-1} + x'(\lambda_{k-1})\Delta\lambda + o(\Delta\lambda), \quad x_k = x_{k-1} + x'(\lambda_{k-1})\Delta\lambda + o(\Delta\lambda),$$

получаем, $x_k^{(0)} = x_k + o(\Delta\lambda)$. Поэтому оценка для η примет вид

$$\begin{aligned} \eta &= \|F(x_k^{(0)})\| = \|F(x_k + o(\Delta\lambda))\| \quad (2.34) \\ &= \|F(x_k) + \int_0^1 F'(x_k + \theta(o(\Delta\lambda)))d\theta o(\Delta\lambda)\| < 0 + \gamma o(\Delta\lambda). \end{aligned}$$

Так как $q = 0.5m^2l\eta$, то из неравенств (2.32), (2.33) и (2.34) вытекает

$$o(\Delta\lambda) \frac{1}{1-o(\Delta\lambda)} < \Delta\lambda$$

или $o(\Delta\lambda) < \Delta\lambda$.

Последнее неравенство, очевидно, всегда выполняется для достаточно малого $\Delta\lambda$. \square

Замечание 4. В работе [42] приводится доказательство этой теоремы для другого алгоритма продолжения.

2.6. Численные эксперименты

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$y^2 - x^3 = 0, \quad (2.35)$$

которое задает полукубическую параболу. Точка $(0, 0)$ – точка возврата. Для построения кривой в соответствии с вышеизложенным способом добавляем уравнение $x - \mu^2 = 0$

$$\begin{aligned} y^2 - x^3 &= 0, \\ x - \mu^2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Итерационный процесс (1.14) сходится в окрестности особой точки. Результат численного решения в проекциях на плоскость xu представлен на рис. 2.2.

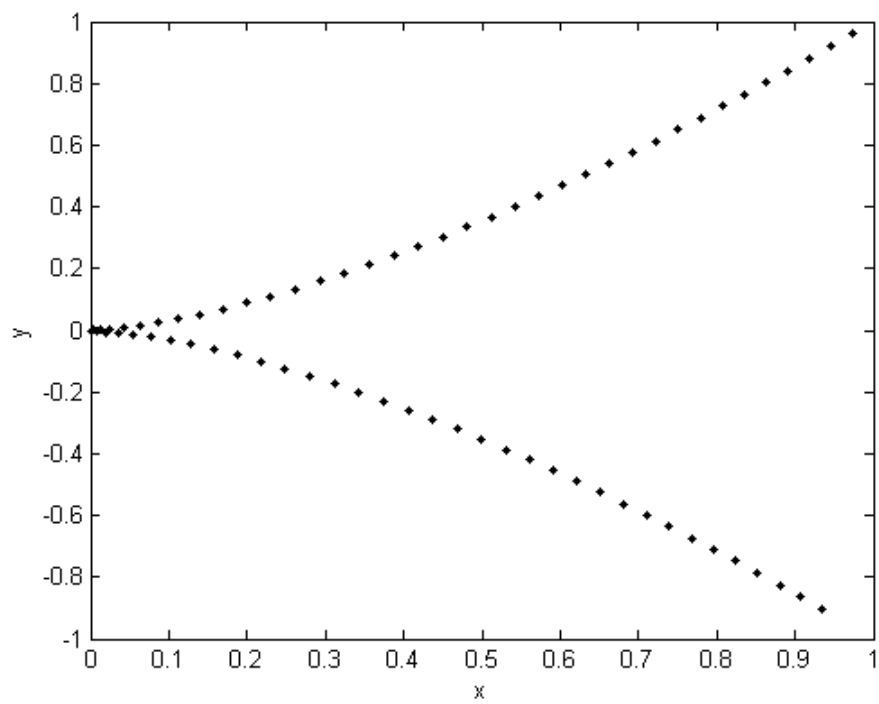


Рис. 2.2.

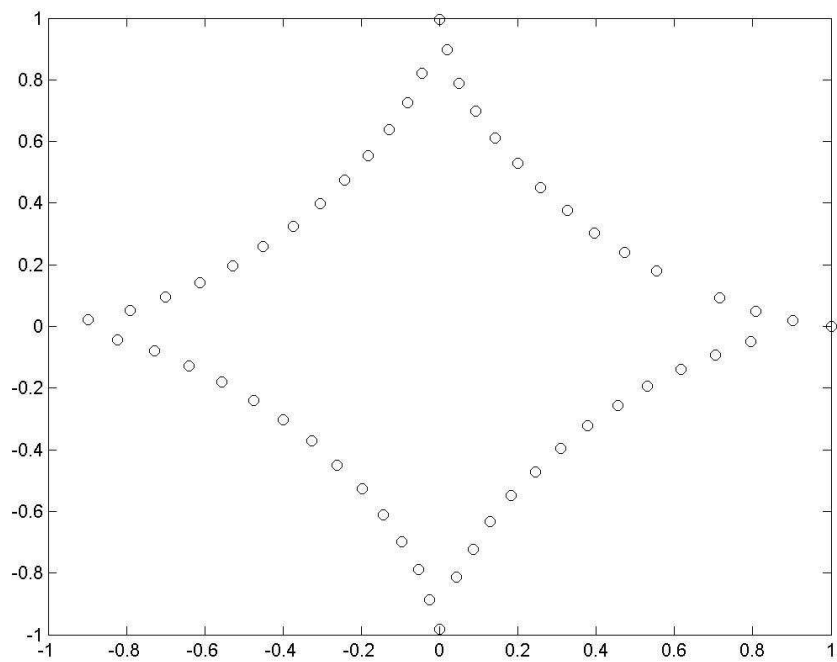


Рис. 2.3.

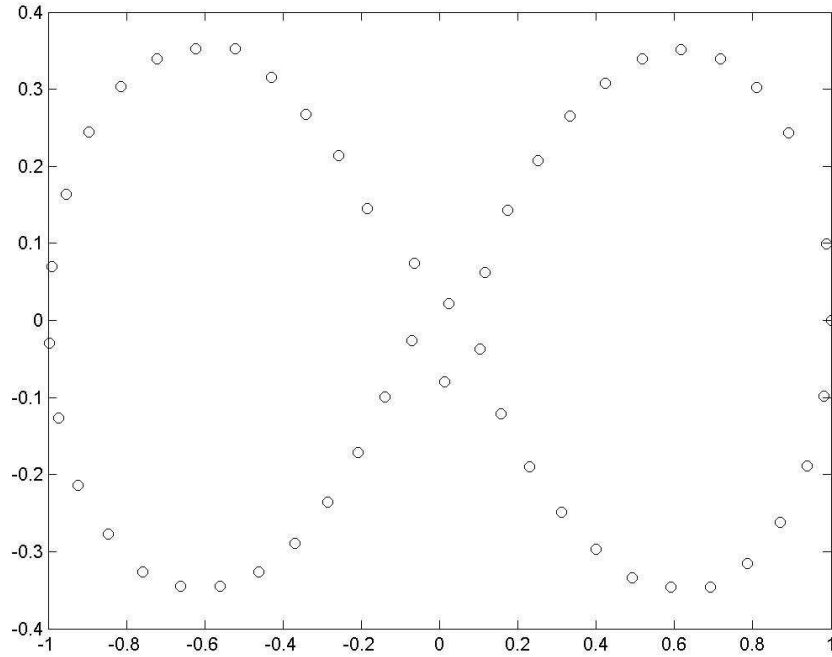


Рис. 2.4.

Пример 2.

С помощью алгоритма, определяющего точки пересечения окружности и кривой, были построены кривые, содержащие точки бифуркации: лемниската Бернулли и астроида (см. рис. 2.3 и 2.4).

Пример 3.

Рассмотрим функцию $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ вида

$$F = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 3^2 \\ (-x + y)(2x - y - z) \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

Тогда множество решений уравнения (2.1) представляет собой множество точек пересечения сферы с центром в начале координат, радиус которой равен трем и двух плоскостей. Множество этих точек образуют два гладких пути, которые пересекаются в точках $x_0 = (1, 1, 1)$ и $x_1 = (-1, -1, -1)$. Они являются точками бифуркации для кривой $F(x) = 0$.

Рассмотрим работу предиктора, описанного в предыдущем пункте. Для определенности в дальнейших построениях рассмотрим точку x_0 .

Матрица Якоби имеет вид

$$J_0 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

Найдем векторы a_1 и a_2 согласно условию (2.18). Для этого можно воспользоваться алгоритмом, который был описан выше. С другой стороны, в данном случае видно, что векторы $(-1, 1, 0)^T$, $(-1, -1, 2)^T$ удовлетворяют условию (2.18). Отсюда получаем ортонормированные векторы, образующие базис в \mathbb{R}^3

$$a_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)^T, a_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right)^T, p = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^T. \quad (2.39)$$

Следовательно, любой вектор x можно разложить по этому базису

$$\mathbf{x} = \rho p + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2. \quad (2.40)$$

Поэтому исследуемую кривую можно рассматривать как функцию параметров ρ , α_1 , α_2

$$\begin{cases} x = x(\alpha_1, \alpha_2, \rho), \\ y = y(\alpha_1, \alpha_2, \rho), \\ z = z(\alpha_1, \alpha_2, \rho). \end{cases} \quad (2.41)$$

Матрица Гессе функции $V = (-x + y)(2x - y - z)$ в точке x_0 примет вид

$$H_0 = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

Пользуясь формулой (2.21) получаем квадратичную форму (2.20), которая в данном случае будет иметь вид

$$6(\alpha'_1)^2 + \sqrt{12}\alpha'_1\alpha'_2 = 0. \quad (2.43)$$

Отсюда получаем $\frac{d\alpha_1}{d\alpha_2} = 0 = \operatorname{tg} 0$ и $\frac{d\alpha_1}{d\alpha_2} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg} \frac{5\pi}{6}$. Эти соотношения дают тангенсы углов наклона касательных векторов к оси, образованной вектором a_2 . Здесь мы пользуемся тем, что касательные векторы к ветвям кривой лежат в плоскости $\Pi(a_1, a_2, x_0)$. Поэтому касательные векторы к каждой ветви кривой имеют вид

$$\mathbf{v}_1 = a_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right)^T, \quad (2.44)$$

$$\mathbf{v}_2 = -\frac{1}{2}a_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}a_2 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^T. \quad (2.45)$$

Интересно сравнить полученный результат с результатами вычислительной программы разработанной в среде MATLAB. На вход программы подаются координаты точки бифуркации x_0 , вектор $F(x)$ и матрица $J(x)$. Результатом работы программы являются векторы v_1 и v_2 . Работа происходит по следующей схеме. Вычисленный вектор w , используется для построения функции V . Далее вычисляются векторы a_1 и a_2 . Для этого производится QR -факторизация. Численно, с использованием конечно-разностных аппроксимаций производных, получается матрица Гессе функции V . Затем, с использованием квадратичной формы, получаются векторы v_1 и v_2 .

Для точки $x_0 = (1, 1, 1)$ получены следующие результаты:

$$w = (0, 1),$$

$$H = \begin{pmatrix} -4.0000 & 3.0000 & 1.0000 \\ 3.0000 & -2.0000 & -1.0000 \\ 1.0000 & -1.0000 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} -0.5774 & -0.5774 & -0.5774 \\ -0.5774 & 0.7887 & -0.2113 \\ -0.5774 & -0.2113 & 0.7887 \end{pmatrix},$$

$$R = \begin{pmatrix} -3.4641 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$a_1 = (-0.5774, 0.7887, -0.2113)^T,$$

$$a_2 = (-0.5774, -0.2113, 0.7887)^T,$$

$$v_1 = (0.0000, 0.7071, -0.7071)^T,$$

$$v_2 = (0.4082, 0.4082, -0.8165)^T.$$

Остается заметить, что $\frac{1}{\sqrt{6}} \cong 0.4082$, а $\frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0.7071$. Поэтому, вычисленные векторы v_1 и v_2 отличаются от полученных выше только обозначением и направлением, что для данной задачи несущественно.

Пример 4.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + (z - 1)^2 - 1 &= 0, \\ y^2 - x^3 + yx^3 &= 0. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Точки возврата располагаются на полюсах сферы $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 - 1 = 0$, т.е. это точки $x_0^1 = (0, 0, 0)$ и $x_0^2 = (0, 0, 2)$. Уравнение $y^2 - x^3 + yx^3 = 0$ играет роль уравнения разветвления, при этом $\alpha_1 = y$, $\alpha_2 = x$. При стремлении к точкам возврата элемент yx^3 является бесконечно малой. Поэтому локально около точек ветвления кривая описывается уравнением $y^2 - x^3 = 0$. Расширение пространства через добавление уравнения $x - \mu^2 = 0$ позволяет пройти эти точки.

На рис. 2.5–2.7 в различных ракурсах приведена кривая множества решений системы уравнений (2.46), полученная численно (в проекции на пространство (x, y, z)). Алгоритм продолжения начал свою работу из точки $(x, y, z, \mu)_0 = (0.7937, 0.5, 1.3465, 0.8909)$, в качестве приближения на следующем шаге была взята точка $(x, y, z, \mu)_1 = (0.7779, 0.49, 1.3934, 0.8820)$. Шаг по длине дуги был взят равным $\Delta\lambda = 0.0513$ (евклидова норма разности двух предыдущих точек). Было пройдено 70 шагов.

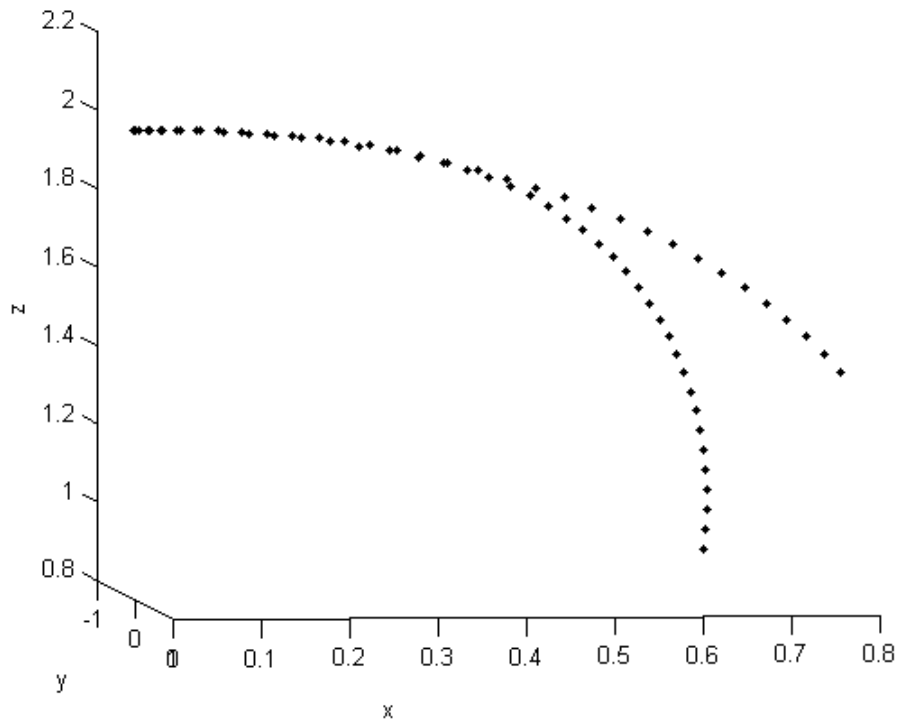


Рис. 2.5.

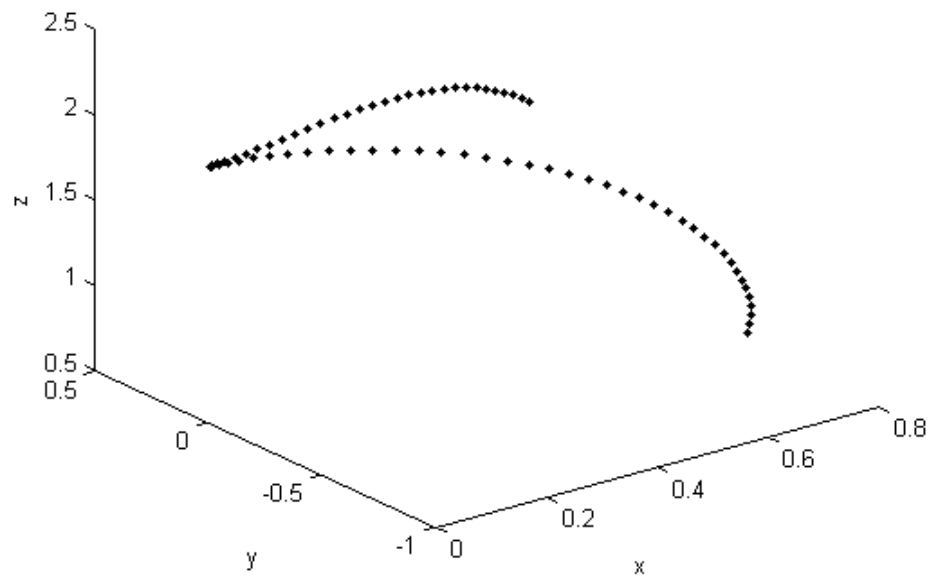


Рис. 2.6.

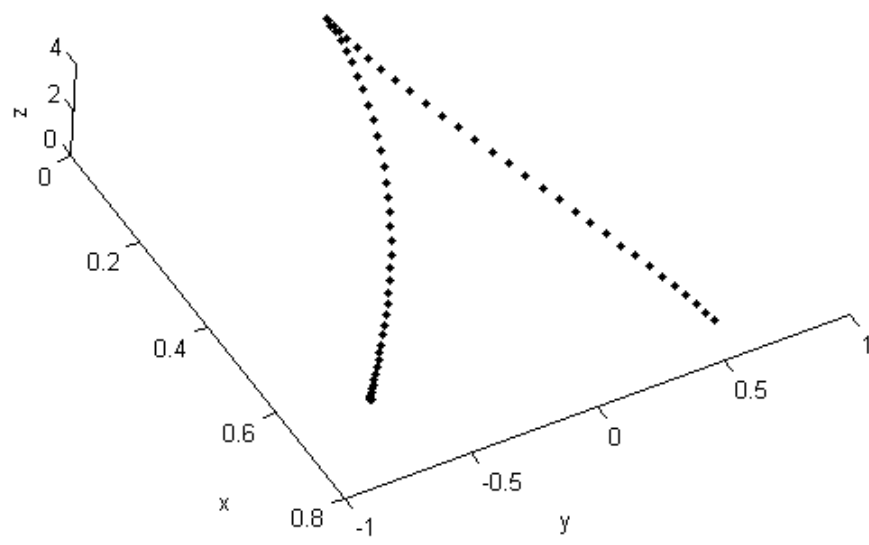


Рис. 2.7.

Пример 5.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} z - x^2 &= 0, \\ 2y^2 - x^3 + 2zx + yz &= 0. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Точка возврата располагается в начале координат $(0, 0, 0)$. Уравнение разветвления совпадает со вторым уравнением системы $V = 2y^2 - x^3 + 2zx + yz = 0$. Подставляя $z = x^2$ (из первого уравнения) во второе уравнение, получаем $2y^2 + x^3 + yx^2 = 0$. Метод диаграммы Ньютона позволяет утверждать, что решение, с точностью до бесконечно малых высшего порядка, можно получить используя уравнение

$$2y^2 + x^3 = 0.$$

Таким образом, получаем $y = \pm(-x/2)^{3/2} + o((-x)^{3/2})$, $x < 0$. Отсюда становится ясно, что необходимая параметризация в окрестности точки возврата имеет вид

$$x + \mu^2 = 0. \quad (2.48)$$

Заметим, что $L = 2$, $M_{0,3} = 1$ и $\text{sign}(L/M_{0,3}) = 1$. Поэтому приходим к системе

$$\begin{aligned} z - x^2 &= 0, \\ 2y^2 - x^3 + 2zx + yz &= 0, \\ x + \mu^2 &= 0. \end{aligned}$$

На рис. 2.8–2.10 в различных ракурсах приведена кривая множества решений системы уравнений (2.47), полученная численно (в проекции на пространство (x, y, z)). Алгоритм продолжения начал свою работу из точки

$$(x, y, z, \mu)_0 = (-0.3333, -0.1667, 0.1111, 0.5773),$$

в качестве приближения на следующем шаге была взята точка

$$(x, y, z, \mu)_1 = (-0.3223, -0.1579, 0.1039, 0.5677).$$

Шаг по длине дуги был взят как $\Delta\lambda = 0.0185$ (евклидова норма разности двух предыдущих точек). Было пройдено 70 шагов.

Пример 6. Если в предыдущей системе (2.47) произвести замену переменных по правилу

$$\begin{aligned} x &= \xi + \eta, \\ y &= \xi - \eta, \\ z &= \zeta, \end{aligned}$$

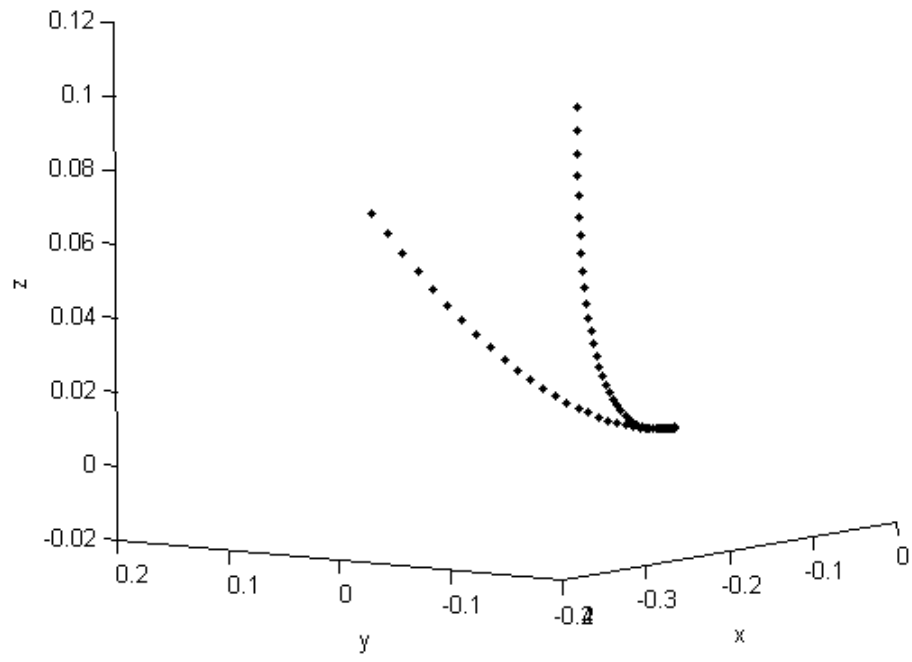


Рис. 2.8.

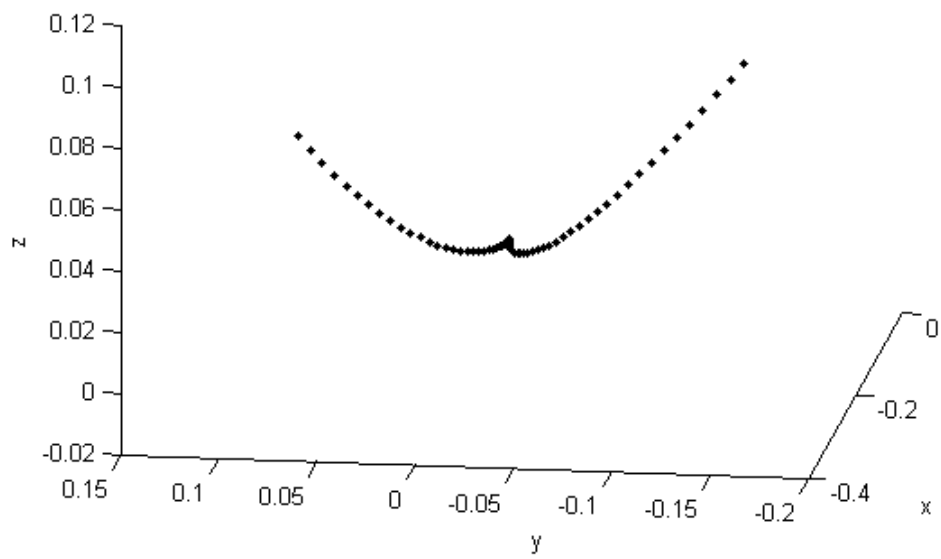


Рис. 2.9.

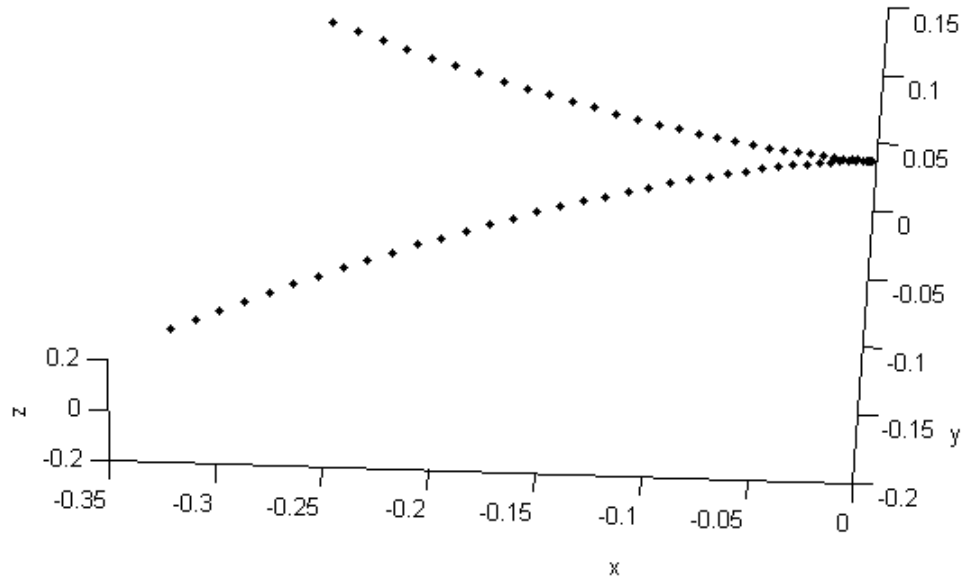


Рис. 2.10.

то получаем следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} F_1 &= \zeta - \xi^2 - 2\xi\eta - \eta^2 = 0, \\ F_2 &= 2\xi^2 - 4\xi\eta + 2\eta^2 - \xi^3 - 3\xi^2\eta - 3\xi\eta^2 - \eta^3 + 3\zeta\xi + \zeta\eta = 0. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Найдем ее частные производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial \xi} &= -2(\xi + \eta), \quad \frac{\partial F_1}{\partial \eta} = -2(\xi + \eta), \quad \frac{\partial F_1}{\partial \zeta} = 1, \\ \frac{\partial F_2}{\partial \xi} &= 4\xi - 4\eta - 3\xi^2 - 6\xi\eta - 3\eta^2 + 3\zeta, \\ \frac{\partial F_2}{\partial \eta} &= -4\xi + 4\eta - 3\xi^2 - 6\xi\eta - 3\eta^2 + \zeta, \\ \frac{\partial F_2}{\partial \zeta} &= 3\xi + \eta. \end{aligned}$$

Матрица Якоби системы (2.49) в точке $(\xi, \eta, \zeta) = (0, 0, 0)$ имеет вид

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что точка $(0, 0, 0)$ особая и $\text{rank } J_0 = n-1 = 1$. Поэтому можно найти векторы a_1, a_2, p :

$$a_1 = (1, 0, 0)^T, a_2 = (0, 1, 0)^T, p = (0, 0, 1)^T,$$

и, следовательно,

$$\rho = \zeta, \alpha_1 = \xi, \alpha_2 = \eta.$$

Функция V совпадает с F_2 и в новых переменных принимает вид

$$V(\rho(\alpha), \alpha) = 2\alpha_1^2 - 4\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_2^2 - \alpha_1^3 - 3\alpha_1^2\alpha_2 - 3\alpha_1\alpha_2^2 - \alpha_2^3 + 3\rho\alpha_1 + \rho\alpha_2.$$

Найдем матрицу Гессе V_0'' в точке $(0, 0, 0)$. Для этого найдем частные производные второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1^2} &= 4 - 6\alpha_1 - 6\alpha_2, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_2^2} &= 4 - 6\alpha_1 - 6\alpha_2, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} &= -4 - 6\alpha_1 - 6\alpha_2. \end{aligned}$$

Поэтому матрица Гессе имеет вид

$$V_0'' = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные векторы h_1, h_2 и соответствующие им собственные значения L_1 и L_2 этой матрицы

$$\begin{aligned} L_1 = 2L = 8, \quad h^1 &= (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})^T, \\ L_2 = 0, \quad h^2 &= (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^T. \end{aligned}$$

Таким образом, матрица имеет одно нулевое и одно ненулевое собственное значение. Перейдем к новым переменным по правилу $\alpha = H\tilde{\alpha}$. Здесь столбцы матрицы

$$H = (h_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

составлены из собственных векторов, при этом в первом столбце находится собственный вектор соответствующий ненулевому собственному значению.

В новых переменных функции F_1 и $V = F_2$ имеют вид

$$\begin{aligned} F_1 &= \rho - 2\tilde{\alpha}_2^2, \\ V &= 4\tilde{\alpha}_1^2 - 2\sqrt{2}\tilde{\alpha}_2^3 + \sqrt{2}\rho\tilde{\alpha}_1 + 2\sqrt{2}\rho\tilde{\alpha}_2. \end{aligned}$$

Теперь становится ясно, что коэффициент при α_2^3 отличен от нуля ($M_{0,3} = 2\sqrt{2}$). Проверим это, используя сформулированный ранее критерий (2.24). При этом неравенство (2.24) принимает более простой вид

$$V''_{\rho\tilde{\alpha}_2}(0)R^{22} + \frac{1}{3!}V'''_{\tilde{\alpha}_2^3}(0) = M_{0,3} \neq 0.$$

Здесь

$$V''_{\rho\tilde{\alpha}_2}(0) = 2\sqrt{2}, \quad \frac{1}{3!}V'''_{\tilde{\alpha}_2^3}(0) = -2\sqrt{2}, \quad R^{22} = 2.$$

Таким образом, получаем $M_{0,3} = 2 \cdot 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

Составим дополнительное уравнение (2.28), в котором роль вектора переменных исходной задачи x играет вектор (ξ, η, ζ) , а точка возврата располагается в начале координат $x_0 = (0, 0, 0)$. Так как справедливы следующие соотношения

$$h_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad h_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\text{sign}(L/M_{0,3}) = \text{sign}(4/(2\sqrt{2})) = 1,$$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(\rho, \alpha_1, \alpha_2) = (\xi, \eta, \zeta) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\xi = [(\xi, \eta, \zeta)T^{-1}]_2,$$

$$\eta = [(\xi, \eta, \zeta)T^{-1}]_3,$$

то получаем

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta) + \mu^2 = 0.$$

Напомним, что это уравнение аналог уравнения (2.48). Разница в коэффициенте связана с тем, что матрица перехода от (x, y, z) к (ξ, η, ζ) не ортогональна, в отличие от перехода от (ξ, η, ζ) к $(\rho, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2)$.

Глава 3

Численное моделирование прикладных задач

3.1. Сверхпроводящая пластина в магнитном поле

Макроскопическая теория сверхпроводимости Гинзбурга-Ландау [8] широко применяется для описания состояния сверхпроводников в магнитном поле.

В случае бесконечной пластины конечной толщины нелинейная краевая задача для уравнений Гинзбурга-Ландау в безразмерных переменных имеет вид [11]

$$\begin{aligned} a'' - \psi^2 a &= 0, \\ \psi'' + \kappa^2(\psi - \psi^3) - a^2 \psi &= 0, \quad 0 \leq x \leq D, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} a(0) &= 0, \quad \psi'(0) = 0, \\ a'(D) &= h, \quad \psi'(D) = 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где все величины вещественны, $0 < D$ – полуширина пластины, h и κ положительные параметры (h – безразмерная величина напряженности магнитного поля, κ – безразмерный параметр теории Гинзбурга-Ландау, характеризующий материал сверхпроводника и меняющийся в широком диапазоне). Здесь вместо размерных величин из [8] – координаты x' , потенциала $A(x')$ и напряженности $B(x')$ магнитного поля, тока $j_s(x')$ – введены безразмерные величины:

$$\begin{aligned} A &= [\phi_0/(2\pi\lambda)]a(x), \quad B = [\phi_0/(2\pi\lambda^2)]b(x), \quad b(x) = a'(x), \\ j(x) &= j_s(8\pi^2\lambda^3)/(c\phi_0^3) = -\psi^2(x)a(x), \quad x = x'/\lambda \end{aligned}$$

($\lambda = \kappa\xi$, ξ – так называемая длина когерентности, $\phi_0 = \hbar c/(4\pi e)$ – квант потока, где c – скорость света в вакууме, \hbar – постоянная Планка, e – заряд электрона); ψ – "эффективная волновая функция сверхпроводящих электронов в металле", которую называют параметром порядка. По сравнению с параметрами Гинзбурга-Ландау (GL) здесь введена другая нормировка h : $h = h_{GL}\kappa$, так что $a = a_{GL}\kappa$. Величина ψ^2 равна концентрации "сверхпроводящих электронов" в металле:

$$0 \leq \psi^2 \leq 1. \quad (3.3)$$

Нетрудно убедиться, что "физическое" ограничение (3.3) на величину ψ^2 является естественным ограничением для решений краевой задачи (3.1)–(3.2). Будем интересоваться основным неотрицательным решением этой краевой задачи, т.е. решением удовлетворяющим ограничению

$$0 \leq \psi(x) \leq 1, \forall x \in [0, D]. \quad (3.4)$$

При математическом моделировании физических процессов, происходящих в сверхпроводящей пластине, представляет интерес зависимость $\psi_0(h)$ [11].

Параметризация задачи.

Введем параметры в краевые условия

$$\begin{aligned} a(0) &= 0 \\ b(0) &= b_0 = p_1 \quad b(D) = h = p_3 \\ \psi(0) &= \psi_0 = p_2 \\ \psi'(0) &= 0 \quad \psi'(D) = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Нахождение параметров p_1 , p_2 , p_3 осуществляется путем движения вдоль кривой, заданной системой уравнений

$$\begin{aligned} b(D, p_1, p_2) - p_3 &= 0, \\ \psi'(D, p_1, p_2) &= 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Обозначим a , $a' = b$, ψ , ψ' как x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , соответственно. Производную этих величин по p_1 как x_5 , x_6 , x_7 , x_8 , соответственно, а по p_2 как x_9 , x_{10} , x_{11} , x_{12} , соответственно.

Для начала расчетов по методу Лаэя [48] было необходимо найти какую-нибудь точку искомой кривой. Первая точка была получена с использованием пристрелки и метода Лаэя. При заданном значении параметра $p_2 = \psi_0$, с помощью пристрелки отыскивался параметр $p_1 = b_0$,

гарантирующий выполнение условия $\psi'(D, p_1, p_2) = 0$. В этом случае недостающий третий параметр $p_3 = h$ можно найти решая задачу Коши. Таким образом, способ получения начальной точки аналогичен методу, изложенному в работе [11]. (Отличие заключалось в применении метода Лаэя при поиске b_0 .)

Для борьбы с сингулярными решениями применялся способ улучшения вычислительного процесса решения начальной задачи, который заключается в использовании вложенных отрезков: $[0, D_0] \subset [0, D_1] \subset \dots \subset [0, D_k]$, где $0 < D_1 < \dots < D_k = D$, см., например, [49]. При отыскании решения на отрезке $[0, D_i]$, $1 \leq i \leq m$ принимается начальное условие, полученное при решении задачи на предыдущем отрезке $[0, D_{i-1}]$, а краевое условие $\psi'(D) = 0$ удовлетворяется в точке $t = D_i$. Предполагается, что на наименьшем отрезке $[0, D_i]$ решение начальной задачи может быть получено.

Преобразованная к наилучшему параметру, система (3.6) перепишется в новых переменных следующим образом [24]

$$\begin{aligned} x_2(D, p_1, p_2) - p_3 &= 0, \\ x_4(D, p_1, p_2) &= 0, \\ (p_1 - p_{1,(j-1)})^2 + (p_2 - p_{2,(j-1)})^2 + (p_3 - p_{3,(j-1)})^2 - \Delta\lambda^2 &= 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Здесь $p_{1,(j-1)}$, $p_{2,(j-1)}$, $p_{3,(j-1)}$ – значения параметров, соответствующих предыдущей точке кривой.

Якобиан этой системы имеет вид

$$\begin{bmatrix} x_6(D, p_1, p_2) & x_{10}(D, p_1, p_2) & -1 \\ x_8(D, p_1, p_2) & x_{12}(D, p_1, p_2) & 0 \\ 2(p_1 - p_{1,(j-1)}) & 2(p_2 - p_{2,(j-1)}) & 2(p_3 - p_{3,(j-1)}) \end{bmatrix}.$$

Для расчета x_i в точке D интегрировалась следующая начальная задача

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2, & x_1(0) &= 0, \\
\dot{x}_2 &= x_3^2 x_1, & x_2(0) &= p_1, \\
\dot{x}_3 &= x_4, & x_3(0) &= p_2, \\
\dot{x}_4 &= x_1^2 x_3 - \kappa^2(x_3 - x_3^3), & x_4(0) &= 0, \\
\dot{x}_5 &= x_6, & x_5(0) &= 0, \\
\dot{x}_6 &= 2x_3 x_1 x_7 + x_3^2 x_5, & x_6(0) &= 1, \\
\dot{x}_7 &= x_8, & x_7(0) &= 0, \\
\dot{x}_8 &= 2x_1 x_3 x_5 + x_1^2 x_7 - \kappa^2(x_7 - 3x_3^2 x_7), & x_8(0) &= 0, \\
\dot{x}_9 &= x_{10}, & x_9(0) &= 0, \\
\dot{x}_{10} &= 2x_3 x_1 x_{11} + x_3^2 x_9, & x_{10}(0) &= 0, \\
\dot{x}_{11} &= x_{12}, & x_{11}(0) &= 1, \\
\dot{x}_{12} &= 2x_1 x_3 x_9 + x_1^2 x_{11} - \kappa^2(x_{11} - 3x_3^2 x_{11}), & x_{12}(0) &= 0.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

На каждом шаге, для получения решения системы (3.7), применялся метод Ньютона. Начальное приближение решения на следующем шаге получалось с помощью линейной интерполяции. Схема решения этой системы уравнений при помощи метода Ньютона примет вид

$$\begin{cases} p_{(k)}^{(i+1)} = p_{(k)}^{(i)} - \left[\frac{\partial \Psi_k}{\partial p}(p_{(k)}^{(i)}) \right]^{-1} \Psi_k(p_{(k)}^{(i)}), & i = 1, \dots, r_k - 1 \\ p_{(k)}^{(0)} = 2p_{(k-1)}^{(r_{k-1})} - p_{(k-2)}^{(r_{k-2})}. \end{cases} \tag{3.9}$$

Здесь

$$\Psi_{k+1}(p) = \begin{cases} F(p) = 0, \\ \|p - p_k^{(r_k)}\|^2 - \Delta\lambda^2 = 0, \end{cases}$$

где $x \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\lambda_{k+1} = \lambda_k + \Delta\lambda$, p – вектор столбец, $F(p) = 0$ – система (3.6).

Результаты расчетов показаны на рисунках 3.1-3.12. Представленные на рис. 3.1 результаты решения совпадают с результатами, полученными в работе [11] (см. фиг.2(а)). На рис. 3.2 результаты принципиально отличаются (см. фиг.3(д) в [11]). Следует отметить, что функция $\psi(x)$ для параметров ψ_0, h , соответствующим отмеченным точкам рис. 3.2, на отрезке $[0, D]$ принимает отрицательные значения (см. рис. 3.4-3.5.), что в работе [11] считается недопустимым (см. неравенство (1.6) там же). Для случая $\kappa = 1$, $D = 3$ получается функция, удовлетворяющая условию (3.4) (см. рис. 3.3).

Для того чтобы получить физически реализуемые случаи пришлось модифицировать методы получения решения. Для облегчения решения задачи были использованы некоторые дополнительные соображения работы [11], заключающиеся в получении решения в предельных случаях

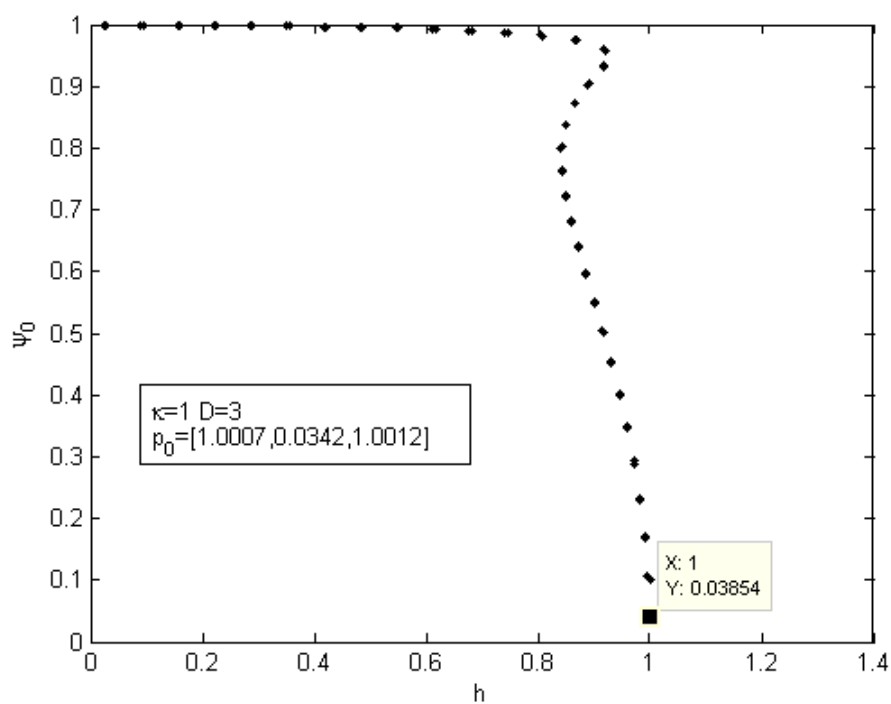


Рис. 3.1.

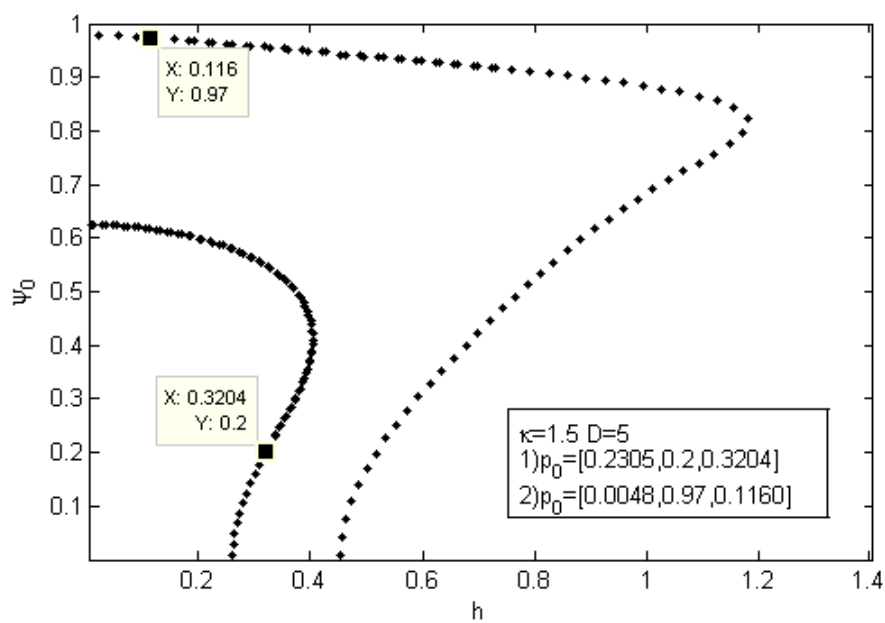


Рис. 3.2.

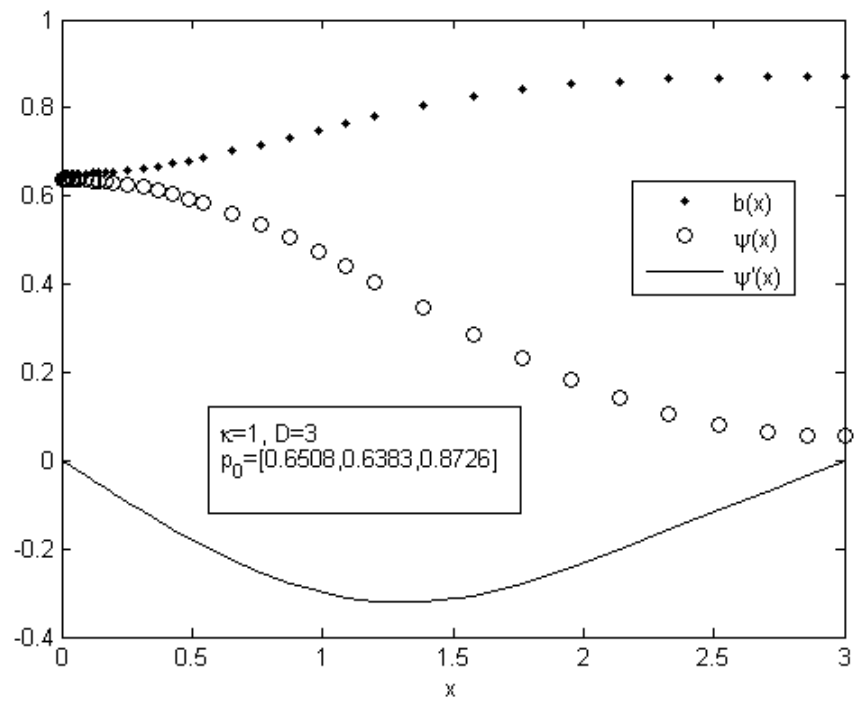


Рис. 3.3.

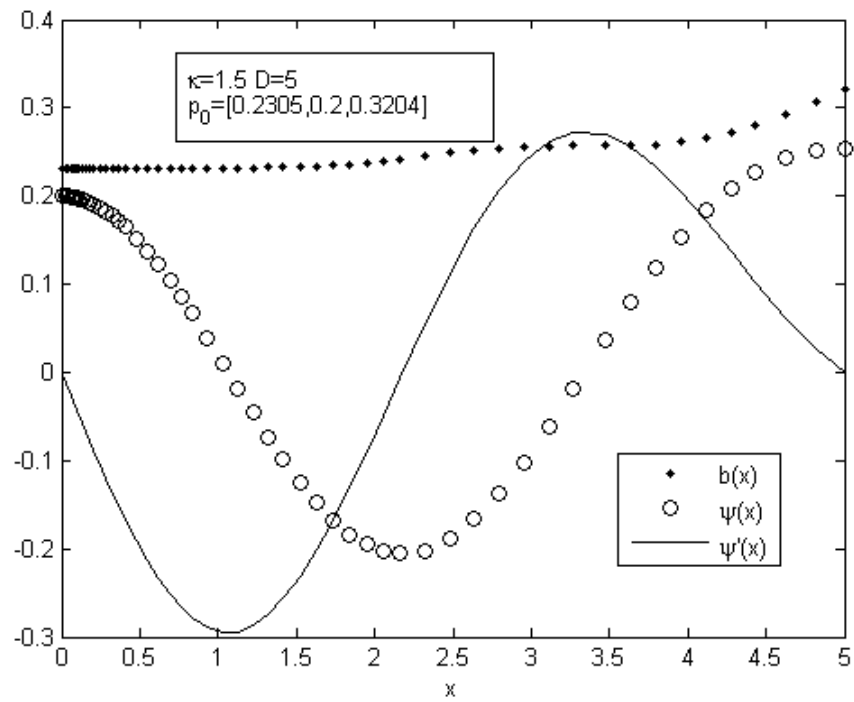


Рис. 3.4.

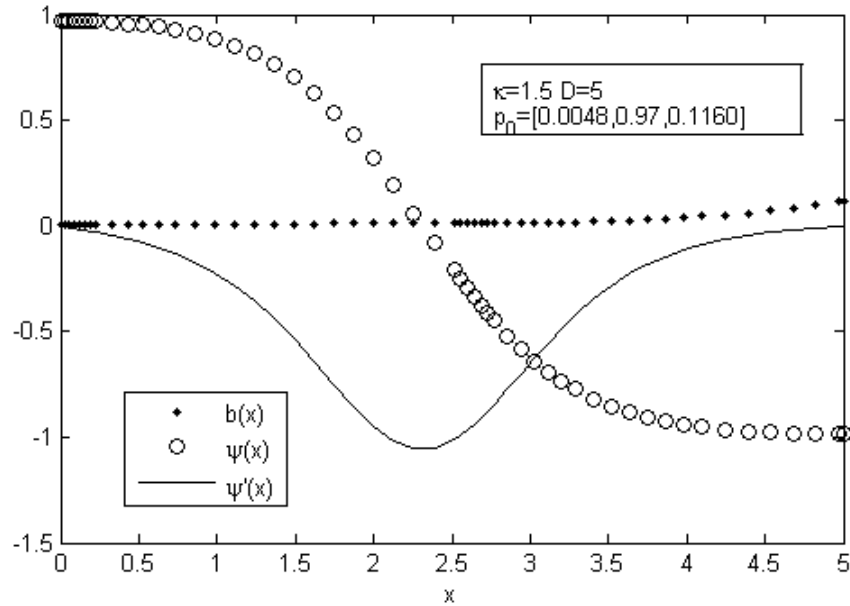


Рис. 3.5.

(асимптотики). С помощью вычислительных экспериментов подтвердились результаты работы [11] об устойчивости и неустойчивости решения. Так, например, решения удовлетворяющие условию $\psi_0 \approx 1$ будут устойчивыми, в противном случае неустойчивыми. Точная граница, где будет наблюдаться переход от устойчивости к неустойчивости, зависит от параметров задачи. Кроме того, эта граница возрастает при возрастании параметров κ и D . Это указывает на возможность проводить решение задачи в два этапа. На первом этапе, с помощью описанного выше способа продолжения по наилучшему параметру, строилось решение при $\psi_0 \approx 1$. Так получалась одна ветвь. Применить этот же алгоритм, для построения другой ветви $0 \leq \psi_0 \lesssim 1$, удастся, но не во всех случаях. Так, например, для случая $\kappa = 0.8$ и $D = 5$ (рис. 3.6-3.9) получается применить вышеизложенный алгоритм для двух ветвей отдельно. Затем оставалось соединить решения. Первая ветвь, в данном случае, описывается изменением параметра: $0.99 < \psi_0 < 1$; вторая – $0 \leq \psi_0 \leq 0.99$.

Рассмотрим второй случай, когда для неустойчивой ветви не удалось применить метод продолжения по наилучшему параметру, для решения уравнений (3.6). Неудача в решении, как выяснилось, связана с тем, что линейная интерполяция, даже при очень малом шаге давала сингулярные решения, т.е. решения которые содержат полюс. (В разделе 1.3 работы [11] исследуются такие решения задачи Коши, связанной с краевой задачей.) Здесь было решено усовершенствовать метод Лаэя поиска параметра b_0 при фиксированном (заданном) параметре ψ_0 . Усовершенствование заключалось в отбраковке сингулярных решений с помощью

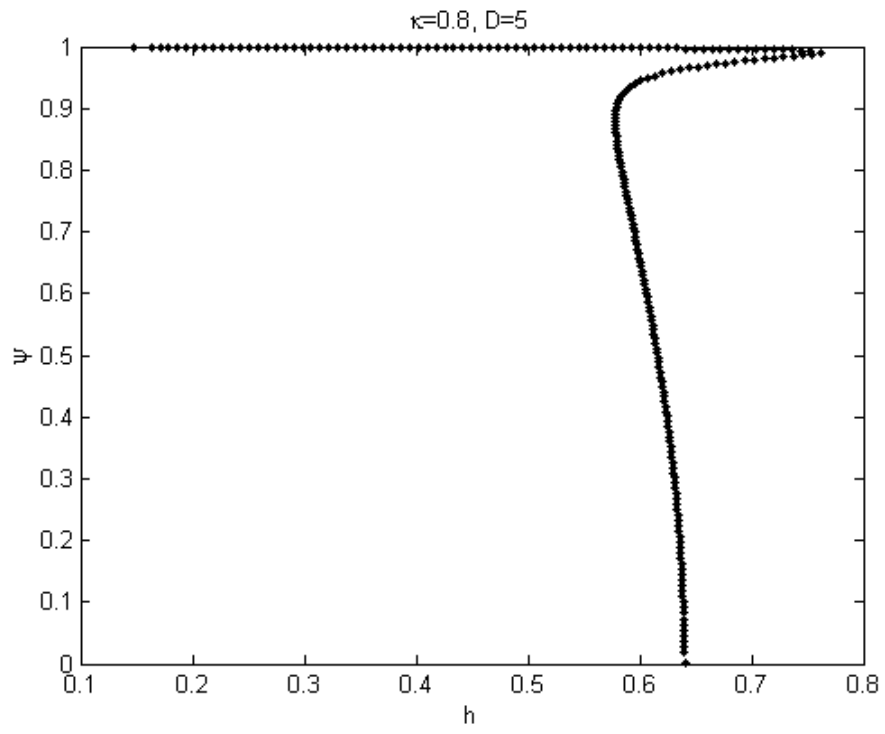


Рис. 3.6.

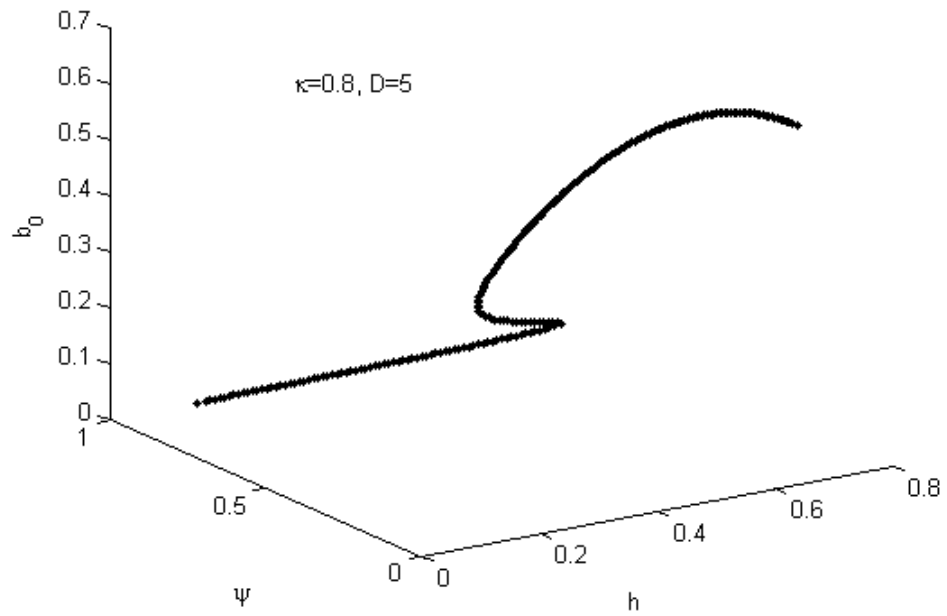


Рис. 3.7.

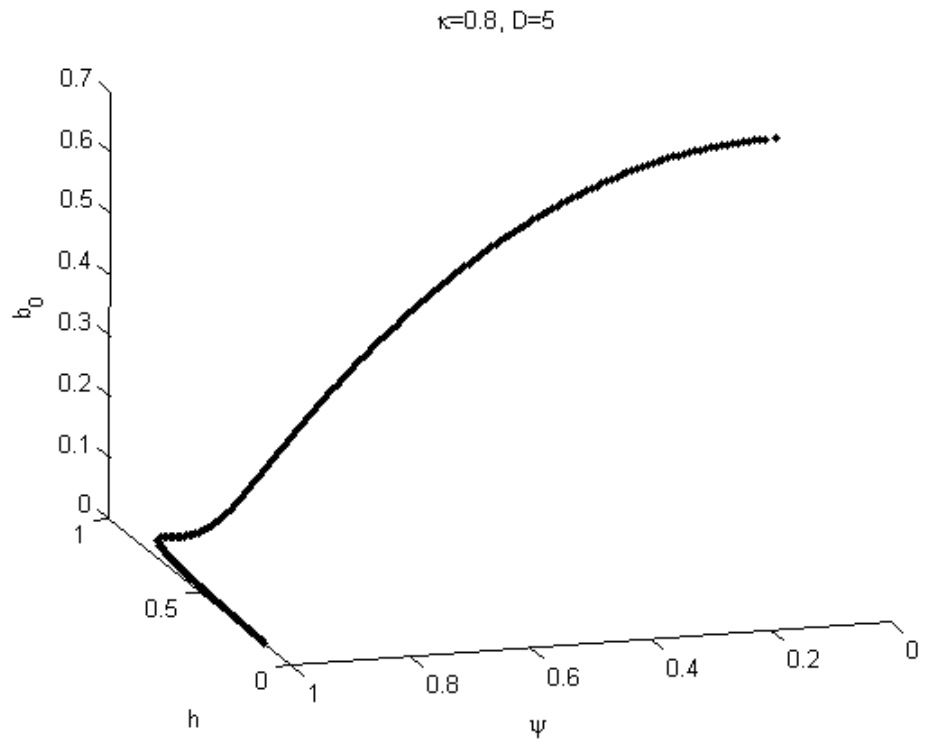


Рис. 3.8.

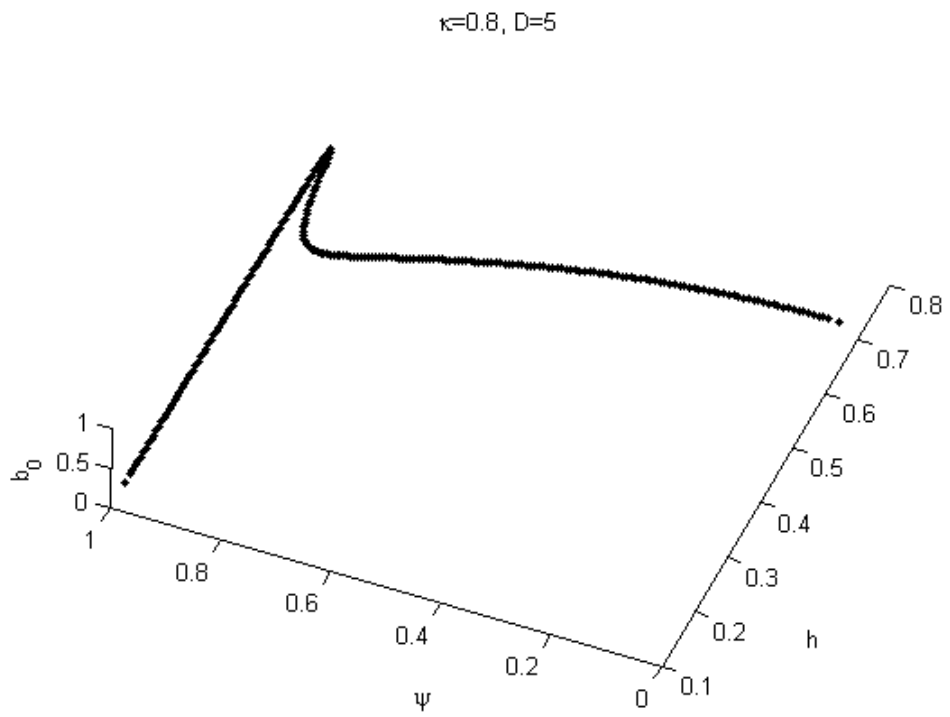


Рис. 3.9.

метода растущего отрезка. Отбраковка производилась при выполнении условия: $|\psi_0| > 1$. С помощью данного способа удалось пройти вторую ветвь. На каждом шаге начальное приближение для параметра b_0 бралось с предыдущего шага. Известно, что краевая задача допускает решение $a(x) = hx$, $\psi(x) \equiv 0$ (см. систему (1.11) работы [11]). Поэтому для нахождения приближения параметра b_0 на первом шаге второй ветви ($\psi_0 \approx 0$) можно воспользоваться точным решением, т.е. $b_0 = a'(0) \approx h$. С помощью двух этих методов построено решение краевой задачи для случая $\kappa = 1.5$ и $D = 5$ (рис. 3.10-3.12). Первая ветвь, в данном случае, описывается изменением параметра: $0.9996 < \psi_0 < 1$; вторая – $0 \leq \psi_0 \leq 0.99$.

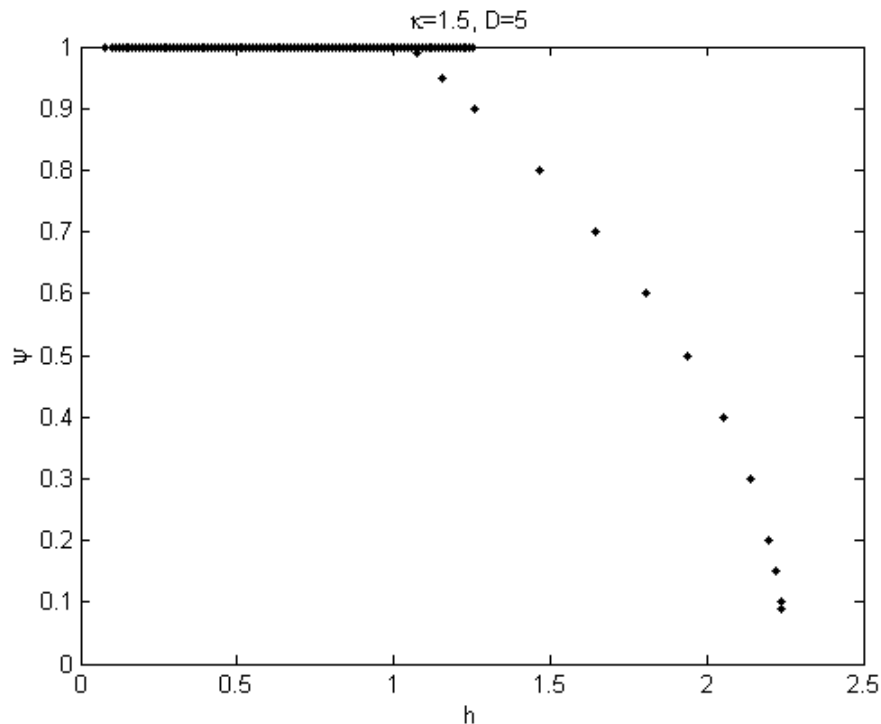


Рис. 3.10.

Таким образом, метод продолжения по наилучшему параметру построения кривой множества решений (или, например, $\psi_0(h)$) автоматизирует процедуру построения той же кривой, которая изложена в статье [11]. Метод продолжения по параметру позволяет успешно преодолевать предельные точки, адаптивно используя параметры, которые обеспечивают движение вдоль кривой.

Тем не менее, для ряда случаев (например, $\kappa = 1.5$, $D = 5$) получить данным методом физически реализуемые решения не удалось. Задача Коши становится чувствительной к начальным данным и сингулярной при определенном выборе параметров. Поэтому было необходимо изменить метод решения задачи Коши. Такое изменение может быть произведено в рамках метода Лаэя. Большая чувствительность производных

$\kappa=1.5, D=5$

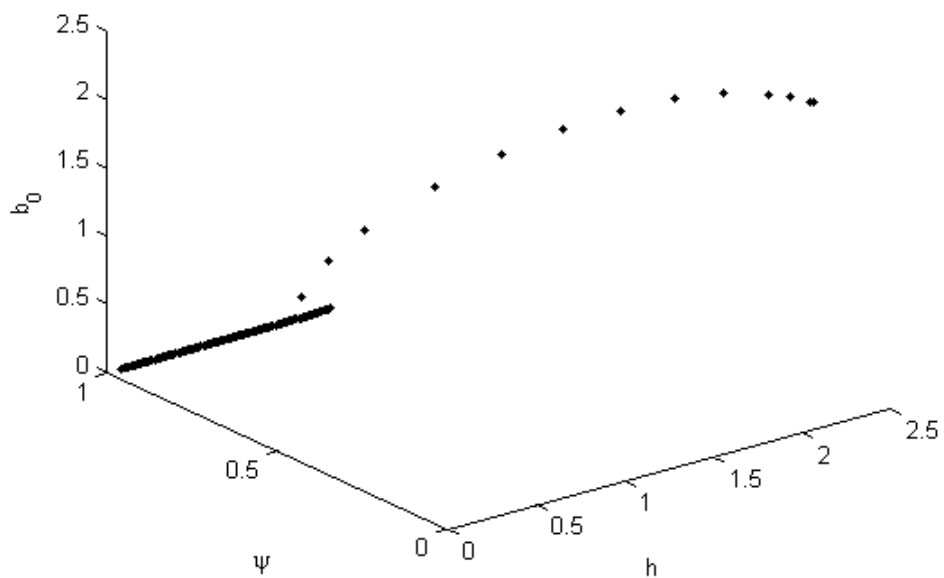


Рис. 3.11.

$\kappa=1.5, D=5$

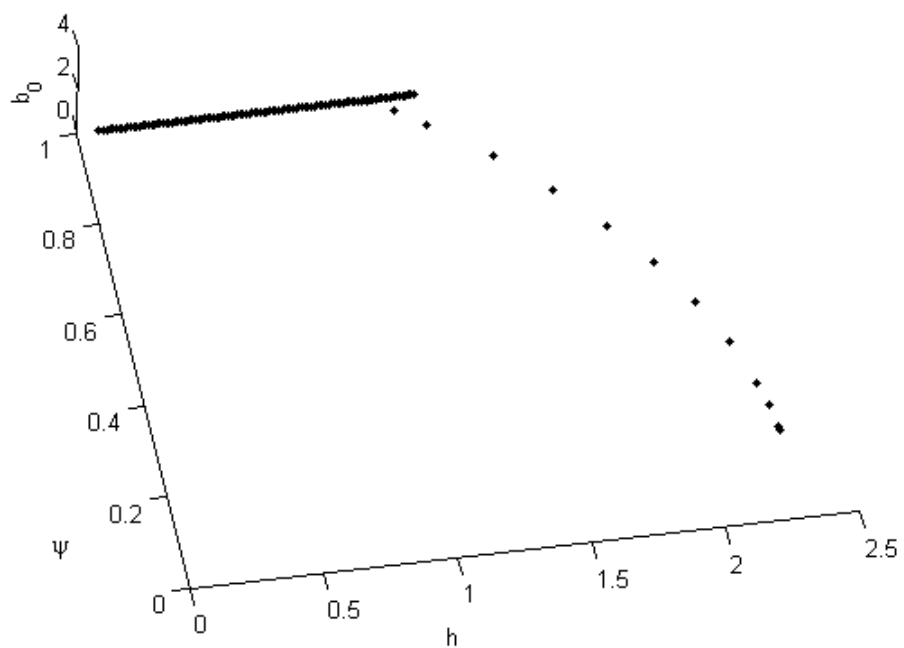


Рис. 3.12.

по параметру κ к выбору начальных условий в системе (3.8) препятствует применению наилучшей параметризации. Разностная аппроксимация производных также не дает хороший результат, так как получается, что приращение должно выбираться из взаимоисключающих условий - гарантировать устойчивость разностной аппроксимации, с одной стороны, и обеспечивать то, что начальное условие, измененное в соответствии с приращением, не породит сингулярное решение, с другой. Автоматизировать построение неустойчивой ветви, однако, можно с помощью метода половинного деления. При таком подходе, зная две начальные точки (ψ_{0i}, b_{0i}) $i = 0, 1$ на кривой, можно с помощью линейной интерполяции получать приближение для следующей точки (ψ_{02}, b_{02}) . Далее, фиксируя значение первой компоненты ψ_{02} , производить поиск второй компоненты b_{02}^* на отрезке $[b_{02} - h, b_{02} + h]$, где $h = (b_{02} - b_{01})/2$. Рис. 3.13 демонстрирует неустойчивую ветвь (для набора параметров задачи: $\kappa = 1.5$, $D = 5$), построенную с помощью данного подхода.

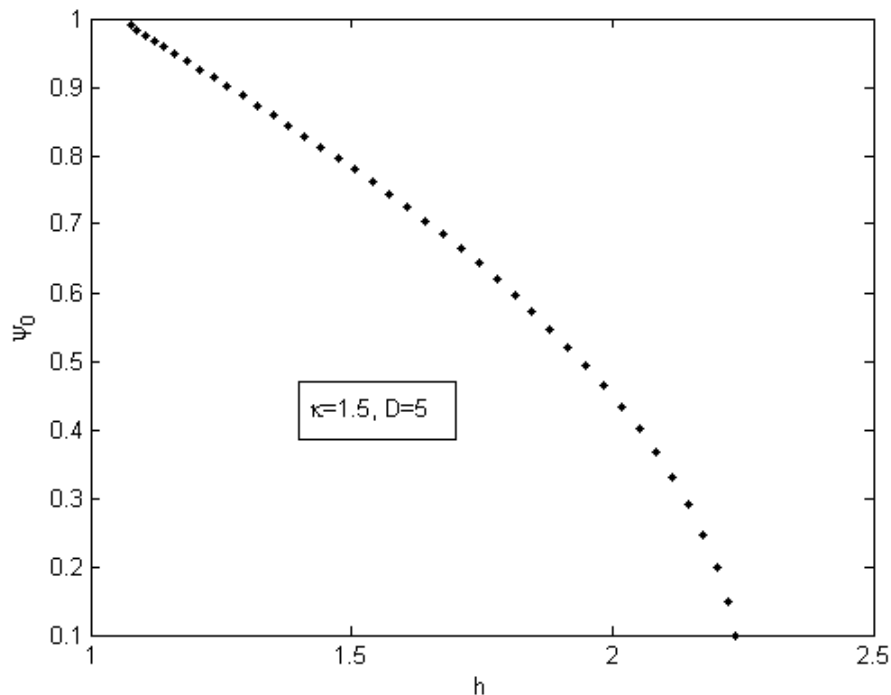


Рис. 3.13.

Для построения неустойчивой ветви также применялся метод конечных разностей. Тем самым, появилась возможность не искать производные функций a и ψ , что позволило увеличить параметры задачи κ , D , для которых можно получить решение.

Конечно-разностная аппроксимация для уравнений (3.1) примет вид

$$\begin{aligned}\Phi_i &= a_{i+1} - 2a_i + a_{i-1} - \tau^2 \psi_i^2 a_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \\ \Psi_j &= \psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1} + \tau^2 \kappa^2 (\psi_j - \psi_j^3) - \tau^2 a_j^2 \psi_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n-1,\end{aligned}$$

где τ шаг сетки: $\tau = D/(N-1)$, $N = n+1$, N - количество узлов.

Конечно-разностная аппроксимация краевых условий (3.2) имеет вид

$$\begin{aligned}\Phi_0 &= a_0 = 0, \quad \Phi_n = a_{n-2} - 4a_{n-1} + 3a_n - 2\tau h = 0, \\ \Psi_0 &= -3\psi_0 + 4\psi_1 - \psi_2 = 0, \quad \Psi_n = \psi_{n-2} - 4\psi_{n-1} + 3\psi_n = 0.\end{aligned}$$

Введем следующие обозначения

$$\begin{aligned}a &= (a_i)_{i=0}^n, \quad \psi = (\psi_j)_{j=0}^n, \quad x = (a, \psi), \\ \Phi &= (\Phi_i)_{i=0}^n, \quad \Psi = (\Psi_j)_{j=0}^n, \quad F = (\Phi, \Psi).\end{aligned}$$

Таким образом, нахождение решения задачи (3.1)-(3.2) сводится к решению системы нелинейных уравнений

$$F(x) = 0. \quad (3.10)$$

Эта система уравнений решалась методом Ньютона при фиксированных κ , h . Результаты для набора параметров задачи $\kappa = 4$, $D = 9$ представлены на рис. 3.14.

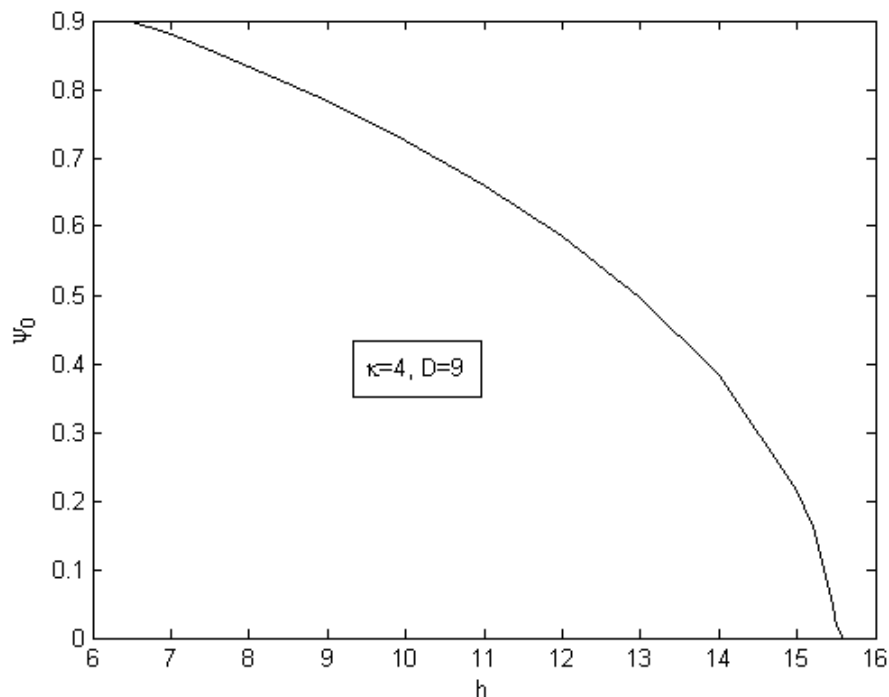


Рис. 3.14.

Кривая множества решений системы (3.6) при возрастании κ , D , имеет предельную точку, находящуюся на некоторой "петле", которая разбивает эту кривую на две части - устойчивую и неустойчивую. Сжатие "гистерезисной петли" отмечается и в работе [11] с.1663 раздел 2.3. Решение этой проблемы требует либо привлечения дополнительных методов, либо разбиения кривой на две части (что ранее и было произведено).

Применение наилучшей параметризации позволяет автоматизировать процедуру построения кривой $\psi_0 = \psi_0(h)$ и в ряде случаев проходить особенность. Поэтому для решения системы (3.10) был применен метод дискретного продолжения по наилучшему параметру [24]. Для этого к переменной задачи x добавлялся параметр h , образуя новый вектор неизвестных $\tilde{x} = (x, h)$, и осуществлялся переход к наилучшему параметру λ , введением в систему уравнений $F(\tilde{x}) = 0$ уравнения $\|\tilde{x} - \tilde{x}^*\|^2 = \Delta\lambda^2$, где $\|\cdot\|$ - евклидова норма вектора, \tilde{x}^* - значение переменной, соответствующей предыдущей точке кривой $\tilde{x} = \tilde{x}(\lambda)$.

Далее вычисления проводились по схеме аналогичной (3.9), где роль p играет \tilde{x} . Результаты для случая $\kappa = 1$, $D = 9$ показаны на рис. 3.15. Для

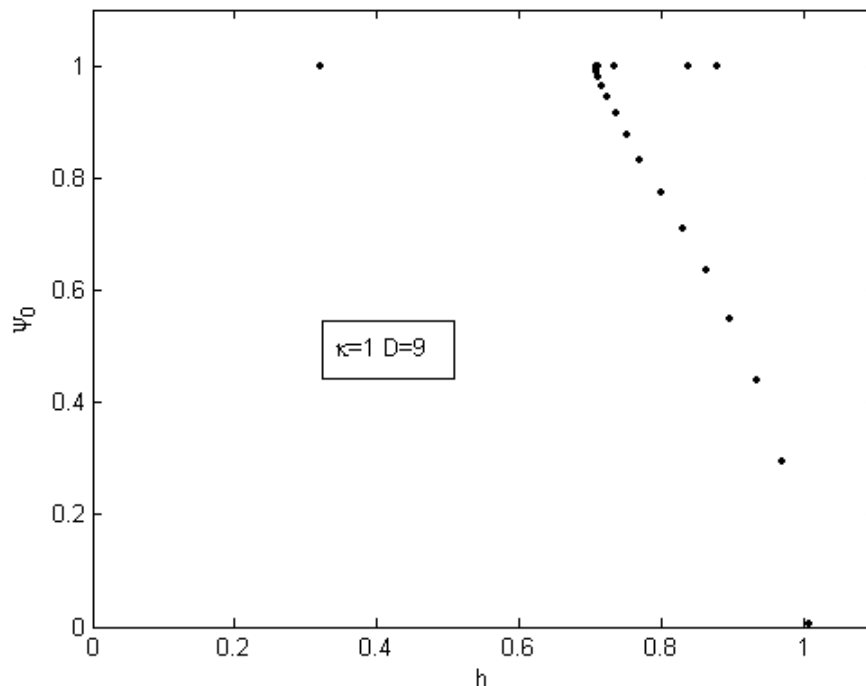


Рис. 3.15.

данного набора параметров удалось успешно пройти особенность. Кривая $\tilde{x} = \tilde{x}(\lambda)$ проходила при постоянном шаге по λ , а наблюдаемая на рисунке неравномерность расположения точек на кривой может объясняться различной величиной проекции шага вдоль кривой на ось переменных

h и ψ_0 . Результаты для более сложного случая $\kappa = 4$, $D = 9$, который в работе [11] не рассматривался, показаны на рис. 3.16.

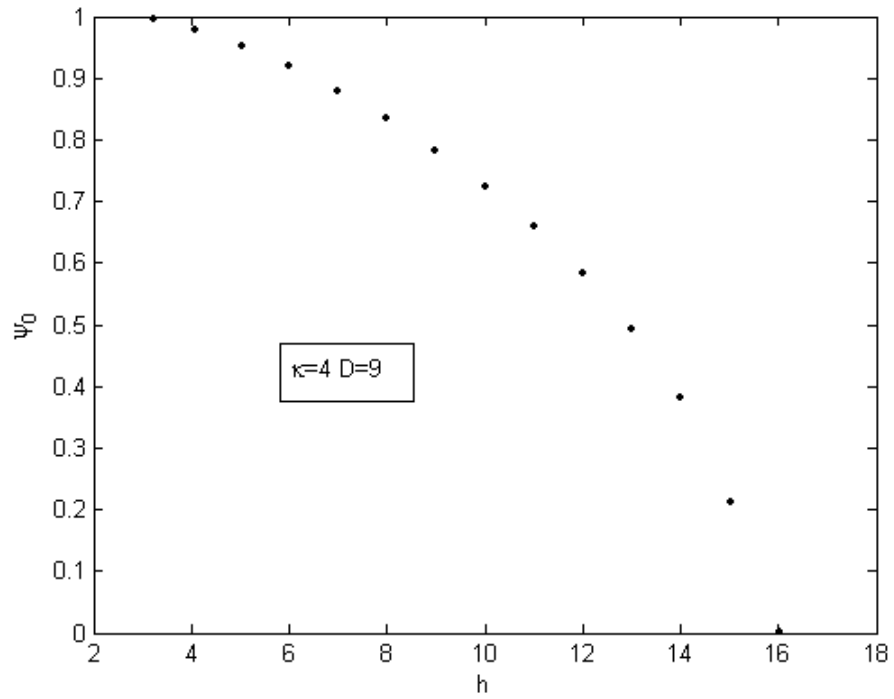


Рис. 3.16.

3.2. Трехстержневая ферма

Рассмотрим симметричную деформацию трехстержневой фермы (рис. 3.17) с возможной потерей устойчивости стержней. Предполагается, что

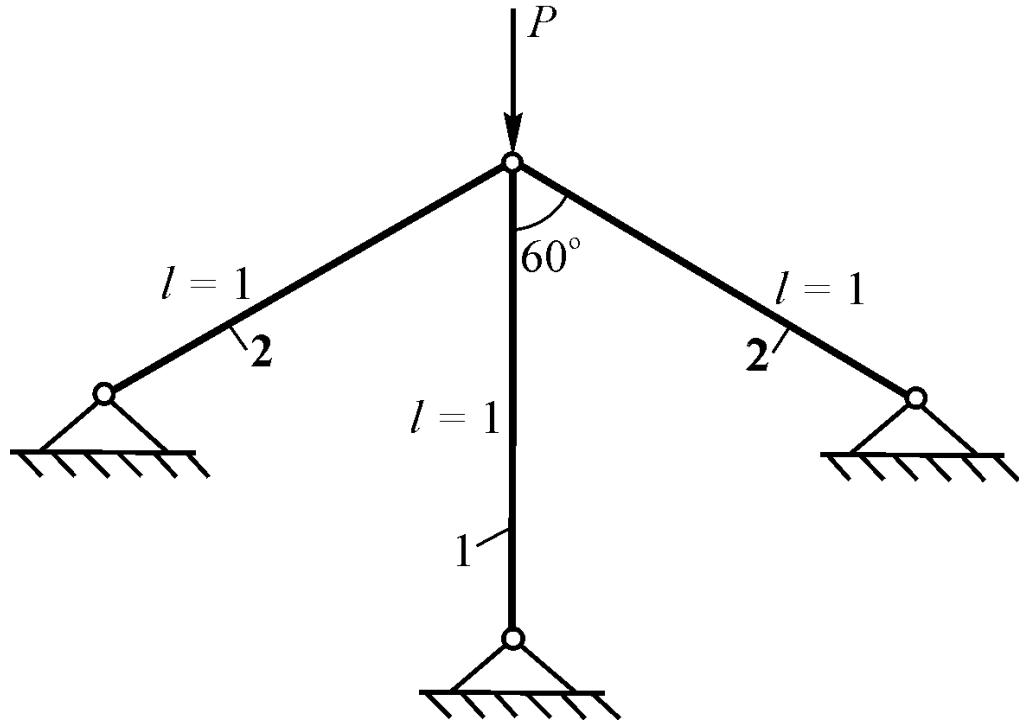


Рис. 3.17.

стержни имеют единичную длину, не являются идеально прямыми и в недеформированном состоянии искривлены по полуволне синусоиды с амплитудами ε_1 и ε_2 ($|\varepsilon_1| \ll 1$, $|\varepsilon_2| \ll 1$, индексы 1 и 2 здесь и ниже соответствуют номерам стержней). Деформация такой фермы подробно рассмотрена в [7]. Она описывается следующими уравнениями (для стержней с одинаковыми поперечными сечениями):

$$N_1 + N_2 - P = 0$$

$$N_1 - 2N_2 + \beta[(W_1^2 - 2W_2^2) - (\varepsilon_1^2 - 2\varepsilon_2^2)] = 0 \quad (3.11)$$

$$W_1(1 - N_1) - \varepsilon_1 = 0, \quad W_2(1 - N_2) - \varepsilon_2 = 0$$

В этих уравнениях P , N_1 и N_2 — нагрузка на ферму и усилия, возникающие в ее стержнях, отнесенные к критическим эйлеровым силам стержней; W_i — амплитуды полного прогиба стержней; β — параметр, характеризующий гибкость стержней. Если $P = 0$, то нелинейная система уравнений (3.11) имеет тривиальное решение, соответствующее недеформированному состоянию:

$$P = 0, \quad N_1 = N_2 = 0, \quad W_1 = \varepsilon_1, \quad W_2 = \varepsilon_2.$$

Если стержни системы идеально прямые, т.е. при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, система (3.11) имеет четыре точных решения

$$\begin{aligned}
 1) \quad & N_1 = \frac{2}{3}P, \quad N_2 = \frac{1}{3}P, \quad W_1 = W_2 = 0; \\
 2) \quad & N_1 = 1, \quad N_2 = P - 1, \quad W_1^2 = \frac{2P - 3}{\beta}, \quad W_2 = 0; \\
 3) \quad & N_1 = P - 1, \quad N_2 = 1, \quad W_1 = 0, \quad W_2^2 = \frac{P - 3}{2\beta}; \\
 4) \quad & N_1 = 1, \quad N_2 = 1, \quad P = 2, \quad W_1^2 - 2W_2^2 = \frac{1}{\beta}.
 \end{aligned}$$

В монографии [7] отмечается, что множество решений системы (3.11) меняется в пространстве сложным образом и имеет три точки ветвления B_1, B_2, B_3 . Для $\beta = 100$ эти решения и соответствующие им формы деформации фермы показаны на рис. 3.18 (рис. 1.14 из [7]) в пространстве W_1, W_2, P . Отмечается, что попытка построить решение с использованием одной из неизвестных в качестве параметра продолжения обречена на неудачу. Например, если в качестве параметра продолжения взять нагрузку P , то вычислительные трудности появятся уже вблизи точки ветвления B_1 , а при приближении к точке B_2 они станут непреодолимыми.

Там же данная задача решается с помощью следующего подхода. Вводится вектор $x = (N_1, N_2, W_1, W_2, P)^T$, и уравнения продолжения (3.11) принимают вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 2\beta W_1 & -4\beta W_2 & 0 \\ -W_1 & 0 & 1 - N_1 & 0 & 0 \\ 0 & -W_2 & 0 & 1 - N_2 & 0 \\ x_{1,\lambda}^* & x_{2,\lambda}^* & x_{3,\lambda}^* & x_{4,\lambda}^* & x_{5,\lambda}^* \end{bmatrix} x_{,\lambda} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Начальные условия определяются недеформированным состоянием

$$x_0 = x(\lambda_0) = (0, 0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, 0)^T. \quad (3.13)$$

В качестве стартового значения вектора $x_{,\lambda}^*$ принимается вектор $(0, 0, 0, 0, 1)^T$. Далее для различных возмущений, т.е. значений $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, строятся отдельно различные ветви с помощью метода Рунге—Кутты с шагом 0.1, а также при использовании неявных схем. Этот подход позволяет, используя малые возмущения, избавиться от точек бифуркаций и фактически не работать с ними.

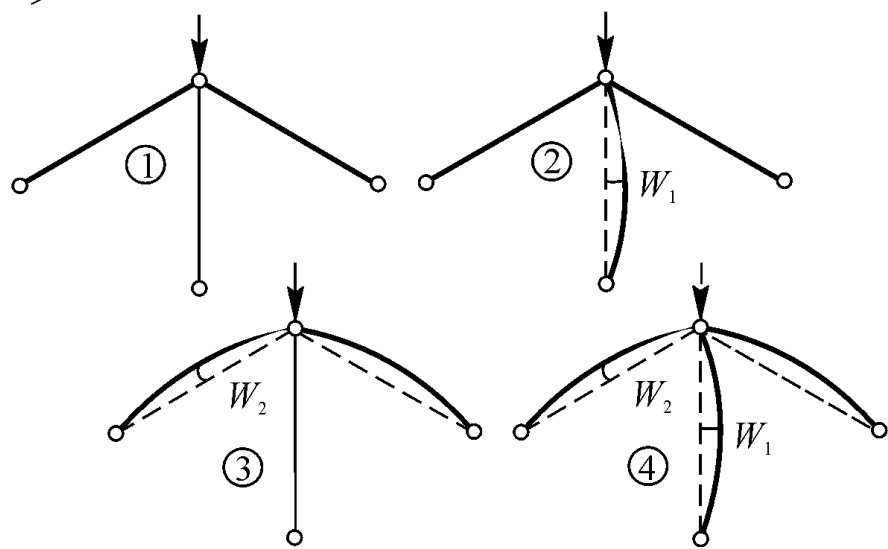
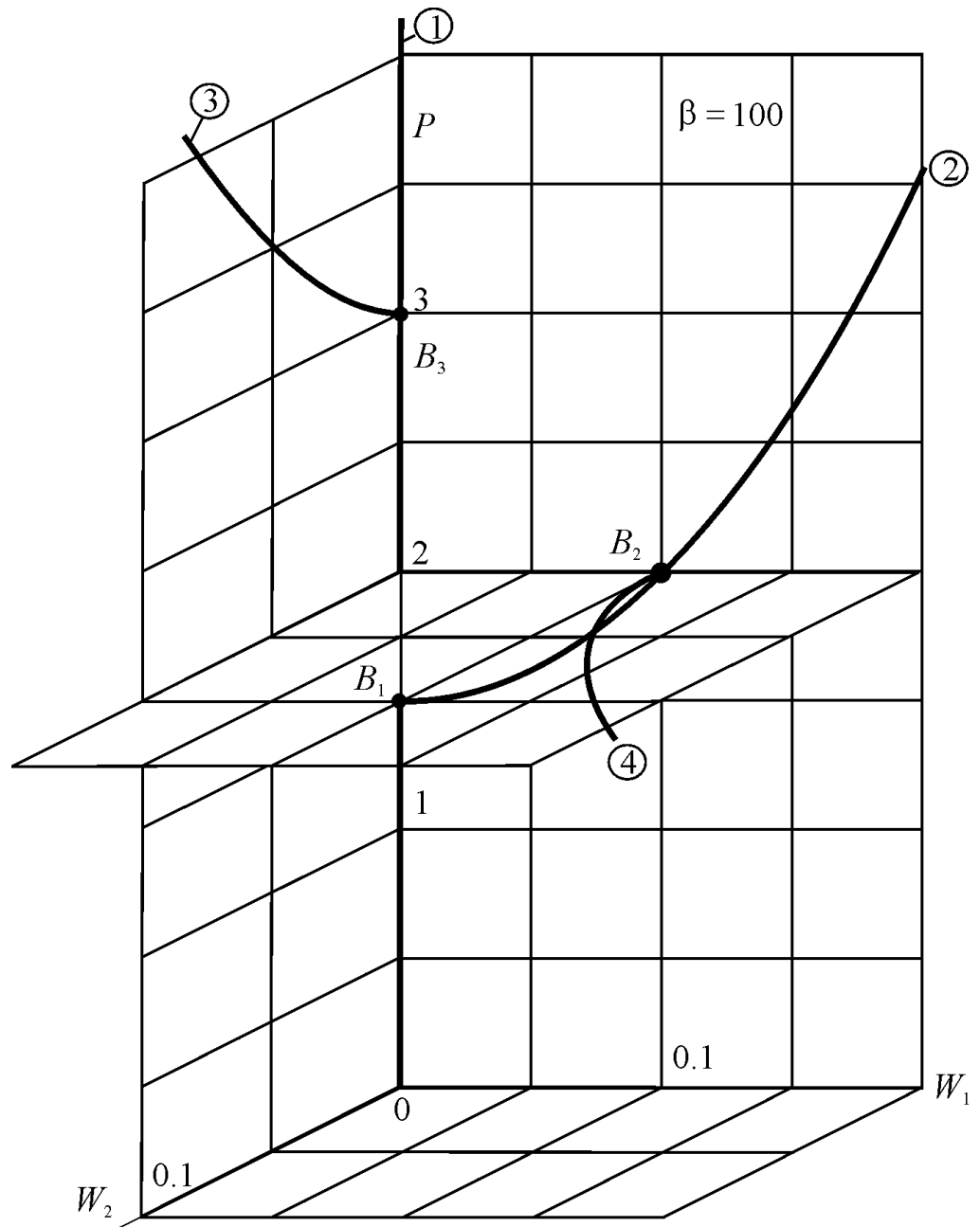


Рис. 3.18.

Обработка точек бифуркации

Для решения данной задачи здесь применялся другой подход. Рассматривалась невозмущенная задача, содержащая точки бифуркации. С использованием метода дискретного продолжения строилась кривая множества решений из точки $(0, 0, 0, 0, 0)$, соответствующей состоянию равновесия. Известно [45], что при прохождении точки простой бифуркации расширенный якобиан системы меняет знак, это так же можно усмотреть из анализа доказательства теоремы 2.1 из главы 2. Воспользуемся этим фактом для обнаружения такой точки.

После того, как мы обнаружили точку бифуркации, используем алгоритм, предложенный в главе 2, для построения всех ветвей кривой. Считаем известными вторые производные, поэтому будем строить касательные векторы к каждой из ветвей кривой.

Используя касательные векторы, получаем необходимые данные (начальные приближения для следующей точки на кривой) для алгоритма продолжения решения вдоль новой бифуркационной ветви.

Результаты расчетов приведены далее.

Начинаем идти по ветви a от точки $A = (0, 0, 0, 0, 0)$ (см. рис. 3.19-3.21). Приближением на следующем шаге является $A_1 = (0.2/3, 0.1/3, 0, 0, 0.2)$.

Первая перемена знака на ветви a происходит после точки $(0.9061, 0.4531, 0, 0, 1.3592)$, ее уточнение дает точку $B = (1.0000, 0.4954, 0.0005, 0, 1.4954)$. Принимаем ее за приближение к точке бифуркации. Запускаем программу построения касательных векторов. В результате получаем векторы $v_{B1} = (0.5345, 0.2673, 0, 0, 0.8018)$ и $v_{B2} = (0, 0, 1, 0, 0)$. Очевидно, что один из касательных векторов будет всегда совпадать с касательным вектором к текущей опорной траектории. В данном случае это вектор v_{B1} .

Используем точки B и $B_1 = B + 0.02v_{B2} = (1.0000, 0.4954, 0.0205, 0, 1.4954)$ для построения новой ветви b . Перемена знака на ветви b происходит после точки $D = (1.0000, 0.9976, 0.0998, 0, 1.9976)$. Принимаем ее за приближение к точке бифуркации. Запускаем программу построения касательных векторов. В результате получаем векторы $v_{D1} = (0.0000, 0.7053, 0.0707, 0, 0.7053)$ и $v_{D2} = (0, 0, 0, 1, 0)$. Используем вектор v_{D2} для построения ветви d .

Вторая перемена знака на ветви a происходит на следующем шаге после точки $C = (1.9396, 0.9698, 0, 0, 2.9094)$. Принимаем ее за приближение к точке бифуркации. Запускаем программу построения касательных векторов. В результате получаем векторы $v_{C1} = (0.5345, 0.2673, 0, 0, 0.8018)$ и $v_{C2} = (0, 0, 0, 1, 0)$. Используя вектор v_{C2} получаем приближение для точки находящейся на новой ветви c :

$C_1 = C + 0.5v_{C_2} = (1.9396, 0.9698, 0, 0.5, 2.9094)$. Используем точки C и C_1 для построения новой ветви c .

По результатам работы была построена кривая, которая визуально совпадает с кривой приведенной в монографии [7]. Легко проверить, что и полученные точки бифуркации с точностью до ошибок вычислений совпадают с точными, полученными аналитически. Имеют место следующие приближенные равенства: $B \approx B_1$, $D \approx B_2$, $C \approx B_3$.

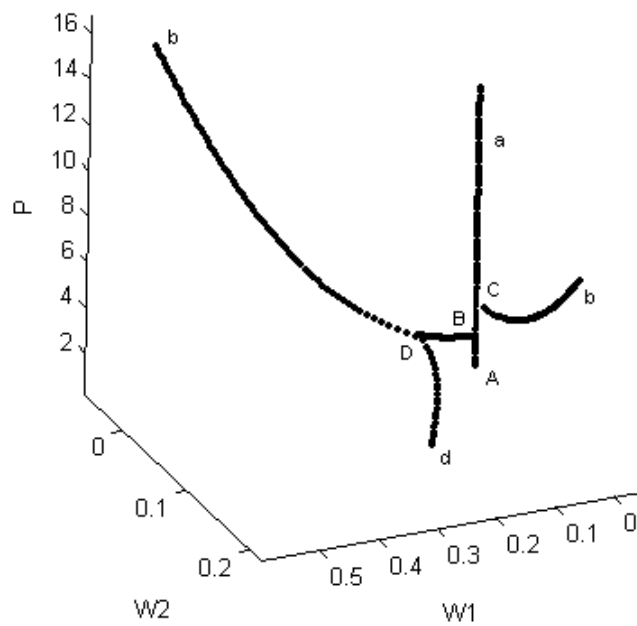


Рис. 3.19.

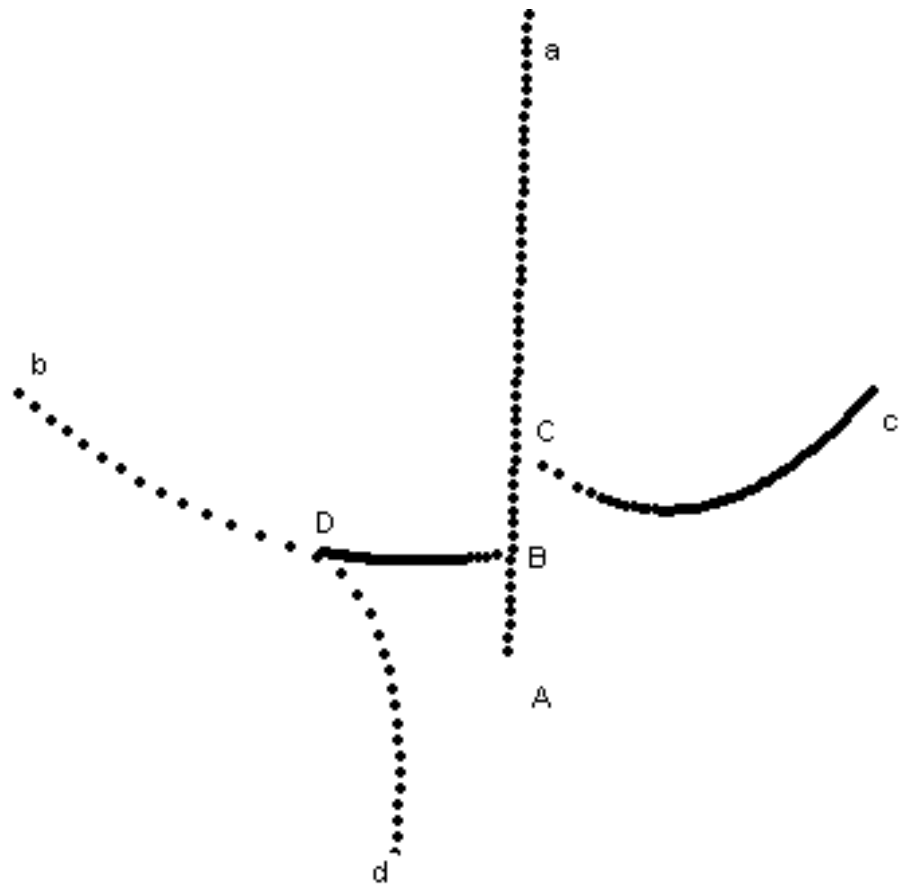


Рис. 3.20.

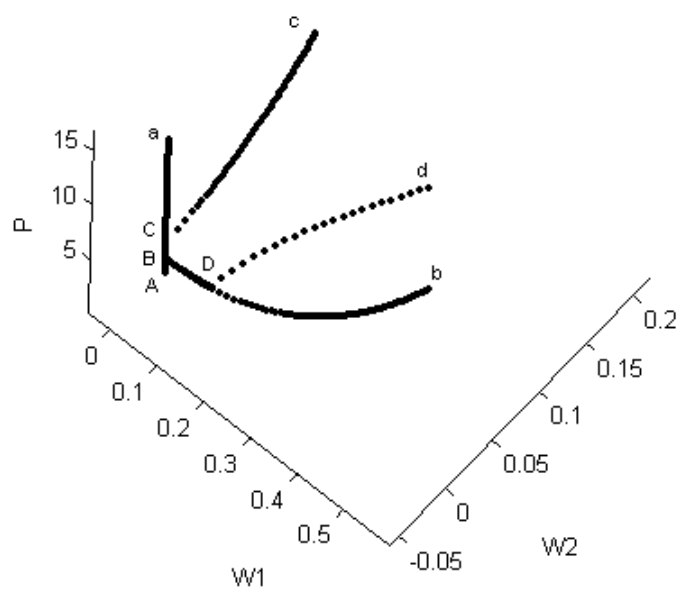


Рис. 3.21.

Заключение

- 1) На основе введения наилучшего параметра, предложена модель движения по кривой множества решений при параметризации краевых условий. Получены теоретические предпосылки к построению качественно лучших алгоритмов, позволяющих проходить некоторые типы особенностей.
- 2) Используя наилучшую параметризацию, построены новые алгоритмы, улучшающие стандартные вычислительные схемы решения краевых задач. Численные исследования показали, что предложенная параметризация краевой задачи существенно улучшает вычислительный процесс метода пристрелки, а использование наилучшего параметра позволяет рассматривать такие граничные условия, для которых решение непараметризованной задачи получить не удастся. Даны рекомендации к улучшению вычислительного процесса в сопутствующих задачах, в том числе и в задаче Коши.
- 3) Предложен простой метод нахождения всех ветвей в точке простой бифуркации. Дано развитие методов продолжения в применении к точкам простого возврата. Предложен способ регуляризации метода продолжения в таких точках.
- 4) Найдена оценка роста нормы матрицы, обратной к матрице Якоби, в окрестности точки простого возврата. На основе этой оценки обоснована нормальная работа алгоритм продолжения. На многочисленных примерах даны иллюстрации эффективной работы предложенных алгоритмов.
- 5) На основе подходов и методов, предложенных в работе, решена прикладная задача из теории сверхпроводимости Гинзбурга-Ландау для новых значений параметров задачи, решена без использования начальных возмущений задача о бифуркации трехстержневой фермы.

Библиографический список

- [1] *Аввакумов С.Н., Киселев Ю.Н.* Краевая задача для ОДУ и приложения к оптимальному управлению // Report at SCI-2004 Conference. - Orlando, 2004.
- [2] *Бахвалов Н.С.* Численные методы. - М.: Наука, 1973.
- [3] *Беллман Р., Калаба Р.* Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. - М.: Мир, 1968. - 183 с.
- [4] *Вайнберг М.М., Треногин В.А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. - М.:Наука, 1969.
- [5] *Годунов С.К.* О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН .- 1961. Т. 16. Вып. 3.- С. 171 – 174.
- [6] *Григолюк Э.И., Лопаницын Е.А.* Конечные прогибы, устойчивость и закритическое поведение тонких пологих оболочек. - М.: Изд-во МАМИ, 2004.
- [7] *Григолюк Э.И., Шалашин В.И.* Проблемы нелинейного деформирования. - М.: Наука, 1988.
- [8] *Гинзбург В.Л., Ландау Л.Д.* К теории сверхпроводимости // Ж. эксперим. и теор. физ. - 1950. Т. 20. Вып. 12. - С. 1064–1082.
- [9] *Давиденко Д.Ф.* Об одном новом методе численного решения систем нелинейных уравнений // ДАН СССР. - 1953. Т. 88. № 4. - С. 601-602.
- [10] *Дулан Э., Дж. Миллер, У. Шилдерс* Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. - М.: Мир, 1983.
- [11] *Дышко А.Л., Жарков Г.Ф., Конюхова Н.Б., Курочкин С.В.* Аналитико-численные исследования нелинейной краевой задачи

- сверхпроводящей пластины в магнитном поле // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. - 2005. Т. 45. № 9. - С. 1651-1676.
- [12] *Задорин А.И.* О численном решении третьей краевой задачи для уравнения с малым параметром// Журн. вычисл. матем. и матем. физ. - 1984. Т. 24. № 7. - С. 1008-1015.
- [13] *Зорич В.А.* Математический анализ. Т. 1. - М.: ФАЗИС, 1997.
- [14] *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. - М.: Физматгиз, 1959.
- [15] *Каханер Д., Моулер К., Нэш. С.* Численные методы и программное обеспечение. - М.: Мир, 1998.
- [16] *Красников С.Д., Кузнецов Е.Б.* Параметризация численного решения краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений. // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. - 2005. Т. 45. № 12. - С. 2148-2158.
- [17] *Красников С.Д., Кузнецов Е.Б.* О некотором подходе к решению задачи об ограниченном движении двух тел. // Международная научная конференция по механике "Третьи поляховские чтения". Избранные труды. - СПб.: Изд-во НИИХ СПбГУ. - 2003. - С. 152-157.
- [18] *Красников С.Д., Кузнецов Е.Б.* Численное решение краевой задачи для нелинейных дифференциальных уравнений с использованием метода продолжения решения по параметру. // Proceedings of the fifteenth Crimean autumn mathematical school – symposium "Spectral and evolution problems". - 2005. Vol.15. - P. 124-126.
- [19] *Красников С.Д., Кузнецов Е.Б.* К параметризации численного решения краевых задач // Дифференциальные уравнения. - 2007. Т. 43. № 7. - С. 943 - 951.
- [20] *Красников С.Д., Кузнецов Е.Б.* Параметризация численного решения нелинейных краевых задач // Математическое моделирование. - 2006. Т. 18. № 9. - С. 3-16.
- [21] *Красников С.Д., Кузнецов Е.Б.* Продолжение решения в точках бифуркации.// Труды Средневолжского математического общества. - 2007. Т.9. № 2. - С. 84-94.

- [22] *Красносельский А.М., Вайникко Г.М., Забрейко П.П. и др.* Приближенное решение операторных уравнений. - М.: Наука, 1969.
- [23] *Кузнецов Е.Б.* Наилучшая параметризация при построении кривой итерационным методом// Докл. РАН. - 2004. Т. 396. № 6. - С. 746-748.
- [24] *Кузнецов Е.Б.* Наилучшая параметризация при построении кривых// Журн. вычисл. матем. и матем. физ. - 2004. Т. 44. № 9. - С. 1540-1551.
- [25] *Кузнецов Е.Б., Красников С.Д.* Численное исследование задач детонации твердого взрывчатого вещества. // Труды международной конференции "VII харитоновские научные чтения". "Экстремальные состояния вещества. Детонация. Ударные волны.". - г. Саров: ВНИИЭФ, 2005. - С. 143-147.
- [26] *Кузнецов Е.Б., Красников С.Д.* Численное исследование задачи Трёша. // Сборник тезисов "VIII харитоновские научные чтения". "Экстремальные состояния вещества. Детонация. Ударные волны.". - г. Саров: ВНИИЭФ, 2006. - С. 87-89.
- [27] *Кузнецов Е.Б., Шалашилин В.И.* Задача Коши как задача продолжения решения по наилучшему параметру // Дифференциальные уравнения. - 1994. Т.30. № 6. - С.964-971.
- [28] *Ракитский Ю.В., Устинов С.М., Черноруцкий И.Г.* Численные методы решения жестких систем. - М.: Наука, 1979.
- [29] *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. - М.:Наука, 1983.
- [30] *Понтрягин Л.С.* Принцип максимума в оптимальном управлении. - М.:Наука, 1989.
- [31] *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. - Киев: Наукова думка, 1986.
- [32] *На Ц.* Вычислительные методы решения прикладных граничных задач. - М.: Мир, 1982. - 294 с.
- [33] *Треногин В.А.* Функциональный анализ. - М.:Физматлит, 2002.
- [34] *Уокер Р.* Алгебраические кривые. - М.: ИЛ, 1952.

- [35] *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1. - СПб.: Изд-во "Лань", 1997.
- [36] *Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б.* Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация в прикладной математике и механике. - М.: Эдиториал УРСС, 1999.
- [37] *Allgower E.L., Georg K.* Numerical Continuation Methods: An Introduction, Series in Computational Mathematics. - Vol. 13. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer Verlag, 1990.
- [38] *Avvakumov S.N., Kiselev Yu.N.* Boundary Value Problem for Ordinary Differential Equations with Applications to Optimal Control // Proceedings of the tenth Crimean autumn mathematical school – symposium "Spectral and evolution problems". - 2000. Vol.10. - P. 147-155.
- [39] *Cont S.D.* The Numerical Solutions of Linear Boundary Value Problems// SIAM Rev. - 1966. Vol.3. № 8. - P. 309 – 321.
- [40] *Crandall M. G., Rabinowitz P. H.* Bifurcation from simple eigenvalues // J. Funct. Anal. -1971. Vol.8. - P. 321–340.
- [41] *Crawford J.D.* Introduction to bifurcation theory// Reviews of Modern Physics. - 1991. Vol. 63. №. 4. - P. 991–1037.
- [42] *Decker D.W., Keller H.B.* Path following near bifurcation // CPAM. - 1981. Vol. XXXIV. - P. 149-175.
- [43] *Kielhöfer H.* Bifurcation Theory: An Introduction with Applications to PDEs. Appl. Math. Sciences 156. - New York: Springer-Verlag, 2004.
- [44] *Keller H.B.* Numerical methods for two-point boundary value problems. - Waltham: Ginn-Blaisdell, 1968.
- [45] *Keller H.B.* Lectures on numerical methods in bifurcation problems. - Berlin: Springer, 1987.
- [46] *Kuznetsov E.B., Krasnikov S.D.* On the Parametrization of Numerical Solutions to Boundary Value Problems for Nonlinear Differential Equations. // Lecture Notes on Computer and Computational Science, International E-Conference on Computer Science 2006.- Leiden-Boston: Brill, 2006. - V.8. - P. 540-544.

- [47] *Kuznetsov E.B., Krasnikov S.D.* To numerical solution of singular perturbed equations transformed to the best argument. // Lecture Notes in Computer Science. Computational Science - ICCS 2003. International Conference Melbourne-Melbourne-Australia and St.-Peterburg, Russia June 2003 Proceedings Part II. - Berlin Heidelberg: Springer - Verlag, 2003. - P. 500-506.
- [48] *Lahaye M.E.* Une metode de resolution d'une categorie d'equations transcendentales // Compter Rendus hebdomataires des seances de L' Academie des sciences. - 1934. Vol. 198. № 21. - P. 1840-1842.
- [49] *Roberts S.M., Shipman J.S.* Two – point boundary value problems: shooting methods. - New York: Elsevier, 1972.
- [50] *Roberts S.M., Shipman J.S.* Solution of Troesch's two-point boundary value problem by combination of techniques.// J. Comput. Phys. - 1972. Vol. 10. - P. 232-241.
- [51] *Trenogin V.A.* Computation of one-parametric families of solutions of nonlinear equations // Proceedings of the Second ISAAK Congress. - 2000. Vol.1. - P. 727-735.
- [52] *Troesch B.A.* A simple approach to a sensitive two-point boundary value problem. //J. Comput. Phys. - 1973. Vol.12. - P. 279-290.
- [53] *Weibel E.S.* Confinement of a plasma column by radiation pressure. - In: The plasma in a magnetic field (R. K. M. Landshoff, ed.). - Stanford: Stanford Univ. Press, 1958.